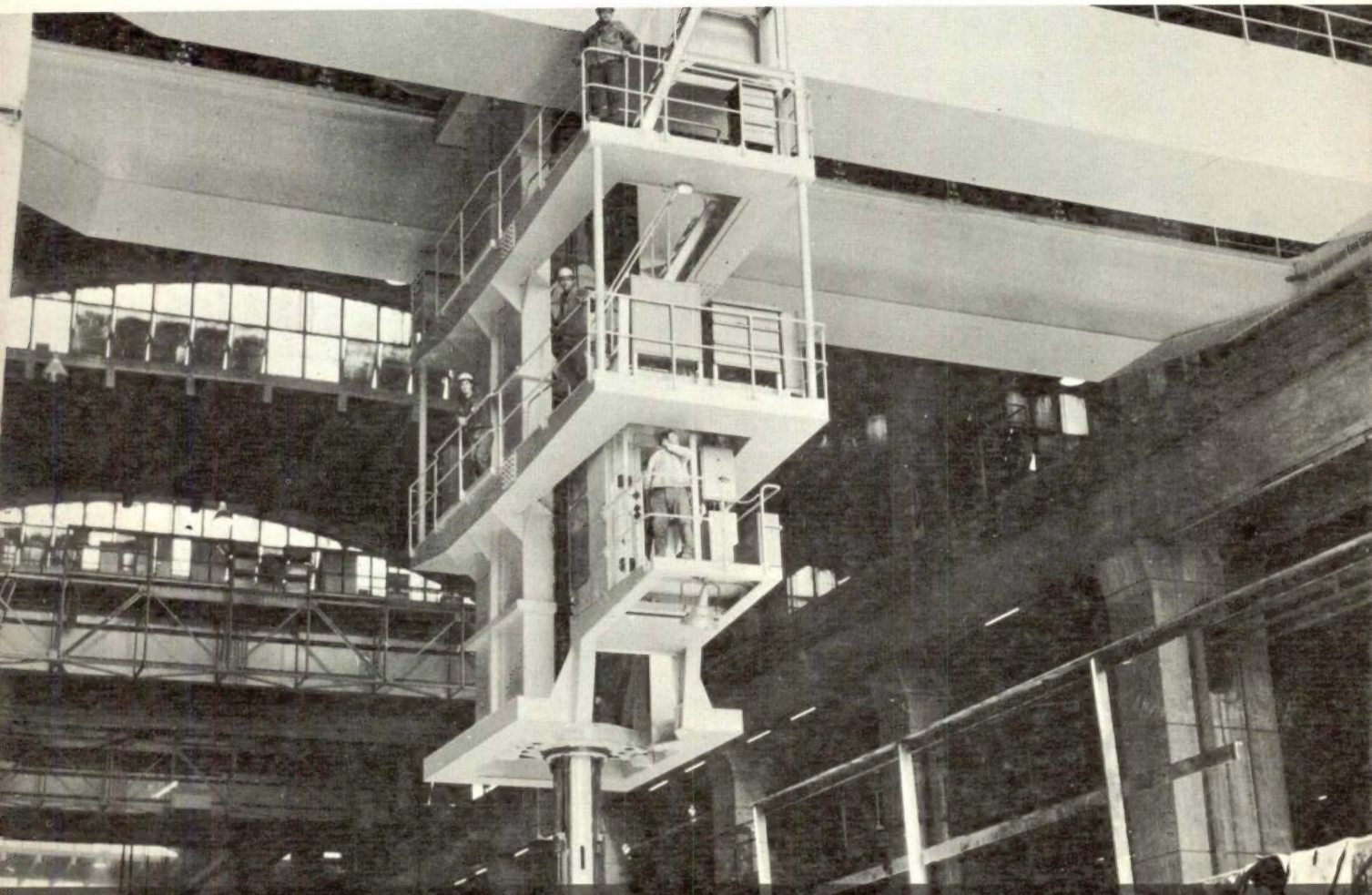
técnica



394 associação dos estudantes do instituto superior técnico
janeiro 1970 revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

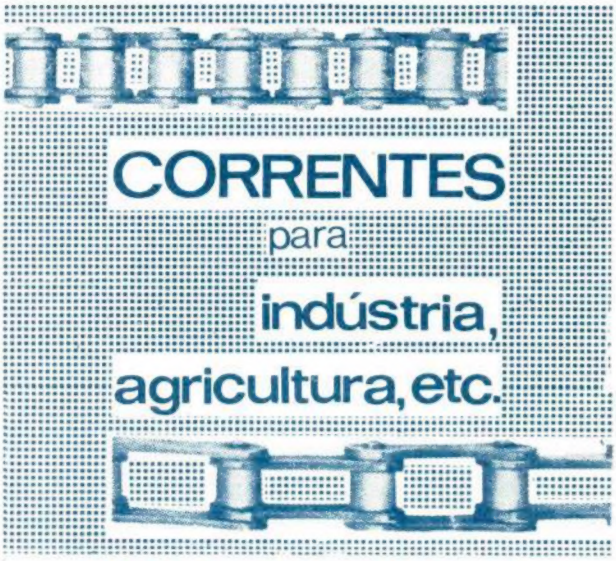
HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

REGINA-EXTRA

REX-REGINA



AUTO ~ LUSITANIA
ALFREDO DUARTE, L.da
AVENIDA DA LIBERDADE, 73-77
LISBOA

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE
Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO
TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO
Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA
TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 91

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 394 JANEIRO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

João Soares Alves

Administrador

Silvério de Sousa Mendes

Secretário

Rui Coutinho Torrinha

Chefe de Redacção

Vladimiro de Oliveira

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

Assinaturas

		5 Nos.	10 Nos.
Continente e Ilhas	—	85$00	160$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	95$00	170$00
Estrangeiro	—		180$00

Número avulso — 25$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

165 *DELGADO DOMINGOS* — **Princípios de máximo em equações às derivadas parciais de segunda ordem de tipo elíptico e sua aplicação em transmissão do calor**

Máximum principles in partial differential equations of second order and elliptic type and applications in heat transmission

175 *CARVALHO FERNANDES* — **Realimentação em sistemas electrónicos lineares**

The linear fredback theory in electronic systems

189 *PERES RODRIGUES, M. BARROSO, AIRES-BARROS* — **Características mecânicas e mineropetrográficas de tarolos de betão extraídos da Barragem de Miranda**

Mechanical and mineralogic-petrografic characteristics of concrete cores obtained in the dam of Miranda

199 *ÚLPIO DO NASCIMENTO* — **A method of stress analysis in excavation slopes**

Um método de análise de tensões em taludes de escavação

207 *PIRES CAMEIRA* **As infraestruturas no transporte ferroviário suburbano em linhas de grande intensidade de tráfego**

Infraestrutures of suburban railway in lines with greeat trafic intensity

198 **Notas informativas**

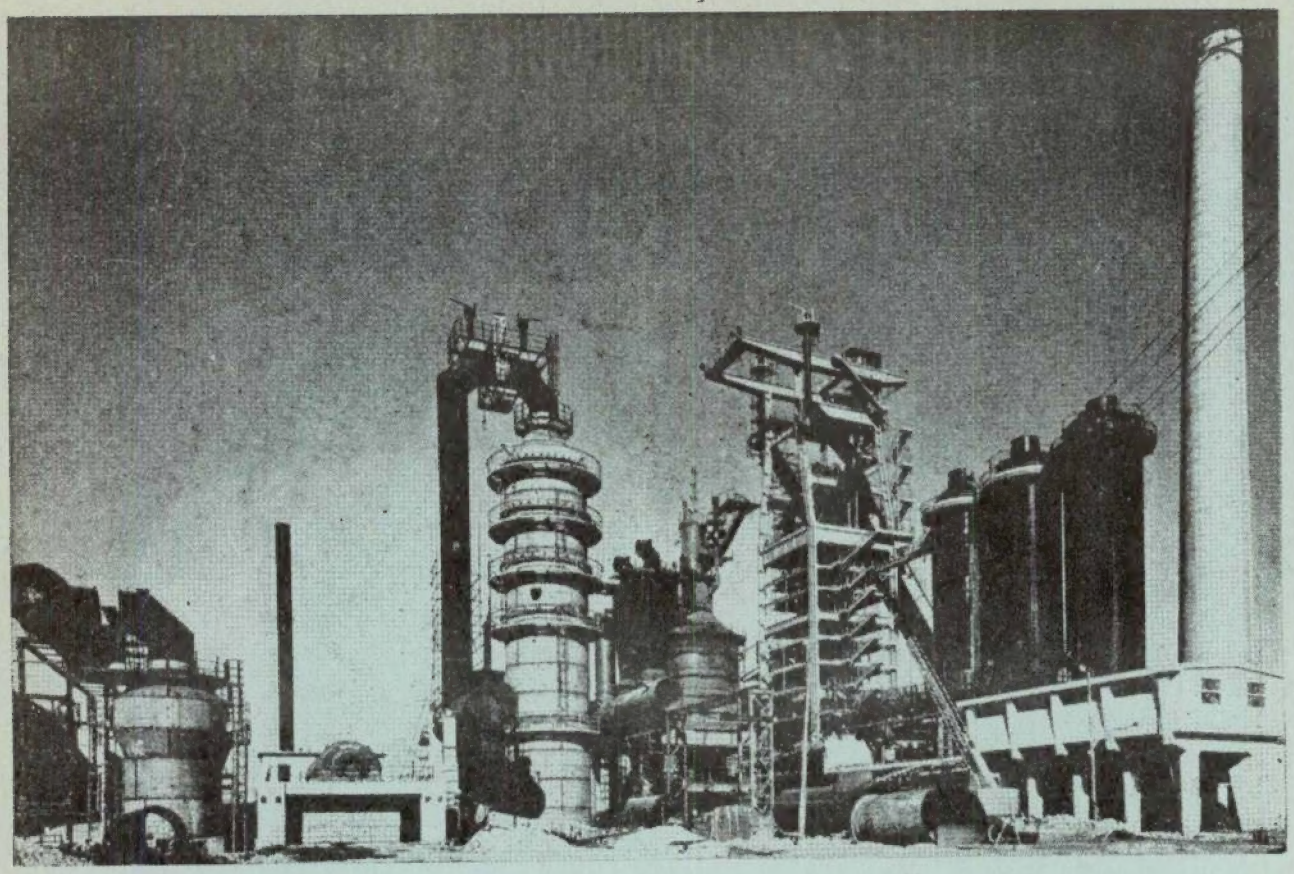
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

221 **Bibliografia**

CAPA: Ponte rolante de deslingotar com 28,5 m de vão em serviço na Siderurgia Nacional — (Construções Metalomecânicas MAGUE).

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

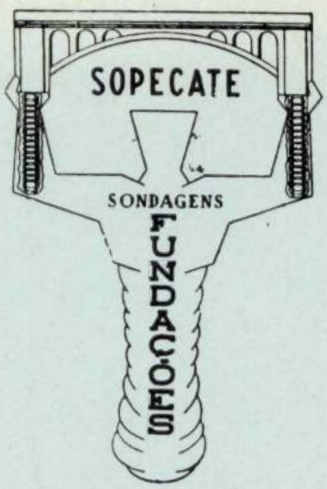
	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXX
Aguiar & Melo	XXIX
Asea Eléctrica	V
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Dial	XX
Electrotécnicos Reunidos	XII
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXV
Empresa Electro Cerâmica	XXVII
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fábrica Portugal	XXVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Frapil	XV
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XXXI
Harker Sumner	XXIV
Heliaço	2.ª da capa
Isola	XXI
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	XXXI
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
Livros Técnicos	V e XXVII
MAGUE	XIII
Mobil Oil	XVIII
Novobra, Lda.	XXI
Orlando Fernandes, Lda.	V, XXXI e XXXII
Prisma	XXI
Quinzena Técnica Francesa	XXIII
Romar	XXII
Rotring	XXVIII
Siemens	4.ª da capa
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
SEPSA	XIV
Standard Eléctrica	IX
Soc. Ind. Metalúrgica	XXXII
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa
Wild Portugal, Lda.	III



ALTO FORNO — SIDERURGIA NACIONAL (Seixal)

Assente sobre Estacas FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI L.DA



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

✱

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

BUREAU VERITAS

GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA

Rua Silva Carvalho, 239

Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS

Venda Nova — Amadora

Tels. 97 06 13 - 97 17 33

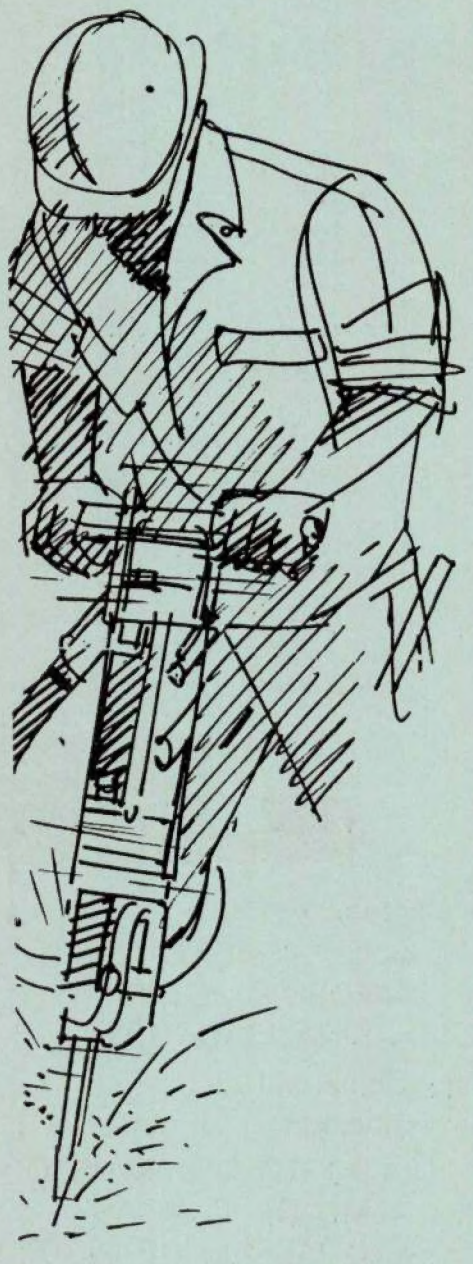
PORTO

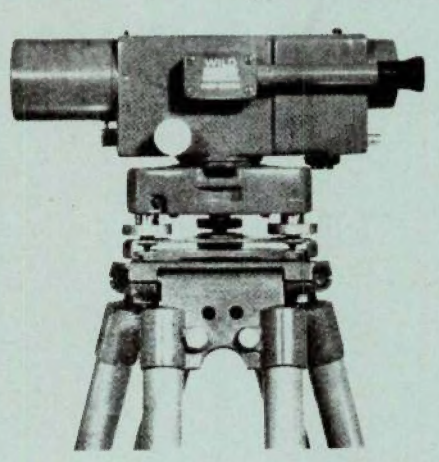
Rua do Bolhão, 216

Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Inabalável

é o nosso
novo compensador





no nível automático para engenheiro WILD NA 2

Amortecedor eficiente para vento e vibrações do solo

Suspensão robusta do pêndulo

Além disso o novo

Botão de controlo do funcionamento

Dispensa de bater no tripé ou no instrumento

Acessório sob pedido:
Micrómetro de lâminas de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.
Imagem direita de observação de grande nitidez

Modelo NAK 2
com círculo de vidro

WILD
HEERBRUGG

Representantes exclusivos:

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 91 12

Entreposto Comercial de Automóveis S.A.R.L.

Impar

JF

Projectou e executou a instalação eléctrica de:

— ILUMINAÇÃO
— FORÇA MOTRIZ
— SINALIZAÇÃO

das novas instalações do Entreposto Comercial de Automóveis, S.A.R.L., fornecendo e instalando

— POSTO DE TRANSFORMAÇÃO
— MONTA CARGAS
— QUADROS DE DISTRIBUIÇÃO DE FORÇA MOTRIZ E ILUMINAÇÃO*

*Fabricado nas nossas oficinas

JF

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA
Rua S. Francisco de Sales, 2 — Telefone 65 41 65 — Lisboa 1

Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
— Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
  a) com armadura de compressão reduzida
  b) com armadura de tracção reduzida
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Compressão simples
— Flexão composta de secções rectangulares
  a) com armadura simétrica
  b) com armadura de tracção reduzida
  c) com armadura de compressão reduzida
— Flexão composta desviada de secções rectangulares
— Flexão composta de secções em T
  a) com armadura de tracção reduzida
  b) comarmadura de compressão reduzida
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
— Esforço transverso

Preço 150$00

Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

Preço 60$00

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

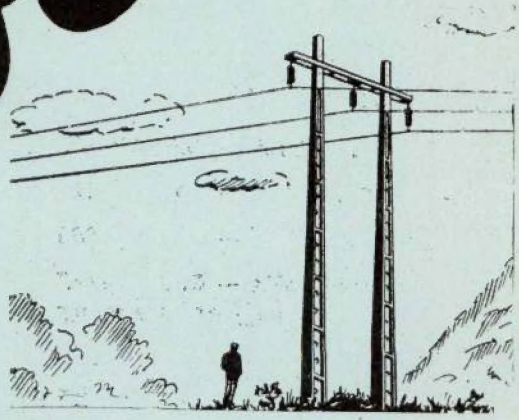
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA
Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1-TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

+ indicadora
+ reguladora
+ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S. 3 PORTO Tel. 0236732

IMPERMEABILIZANTES E ADITIVOS PARA CIMENTO

'PUDLO'

KERNER GREENWOOD & CO., LTD.
KING'S LINN, ENGLAND

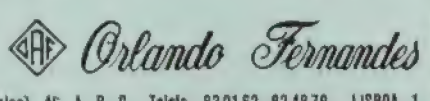
PRODUTOS DA GAMA «PUDLO»:
Impermeabilizante líquido • Impermeabilizante em pó
Impermeabilizante incolor
Acelerador de presa • Tintas impermeabilizantes
Plastificante de argamassas • Endurecedores
Ligante para cimento • Cimento refractário «FEUSOL», etc.

DEPOSITÁRIO GERAL:

PILOTO & SANTOS, LDA.

LARGO DR. ANTÓNIO SOUSA MACEDO, 2
TELEFONE 67 88 67 LISBOA-2

Representante exclusivo em Portugal



RUA PALMIRA (aos Anjos), 46, A, B, C - Telefs. 830163-834879 - LISBOA-1

WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.° — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 paises, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 países entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica

ITT

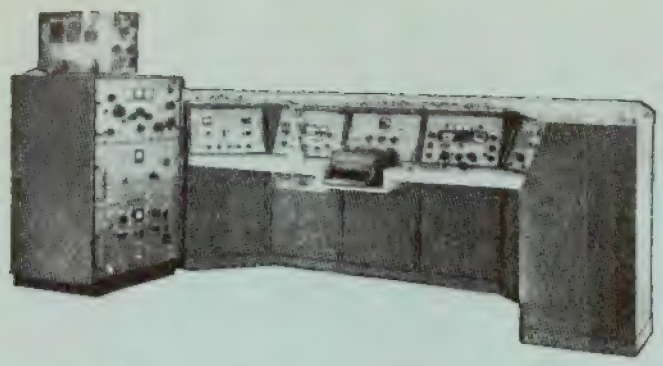
TG

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para:
impermeabilizar terrenos,
paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

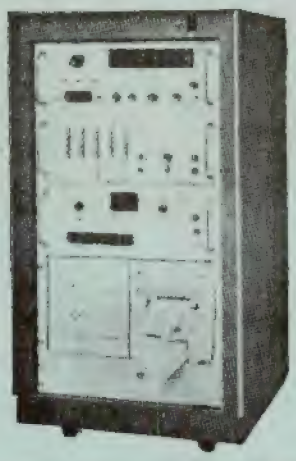
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

aparelhagem electrónica de medida e registo

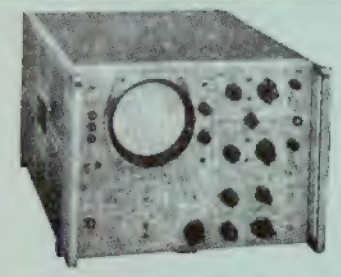
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn

Osciloscópio HP



Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

CONTROLE INDUSTRIAL

Mas com aparelhagem de Controle Industrial que dá informações precisas sobre as condições do processo em curso e corrige automàticamente os desvios às condições ideais.

O industrial português conquistará o seu lugar no Mercado Mundial se não esquecer que a luta com a concorrência começa a ser ganha durante a produção.

A realização do controle durante o processo, além de dar ao industrial garantias de boa produção, dá ao Comprador a certeza da boa qualidade dos produtos que compra.

FISHER Controls · CROUZET · TAYLOR · SAUTER · ENRAF

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS, LDA.
AV. DUQUE D'AVILA, 66, 3.º TELEF 41161/5

técnica

NÚMERO 394 JANEIRO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 517.946.51

PRINCÍPIOS DE MÁXIMO EM EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM DE TIPO ELÍPTICO E SUA APLICAÇÃO EM TRANSMISSÃO DO CALOR (*)

por J. J. DELGADO DOMINGOS
Prof. I.S.T.
N.E.E.N. do I.A.C.

RESUMO

Apresentam-se por via «física» os fundamentos dos princípios de máximo em equações às derivadas parciais de segunda ordem de tipo elíptico e o enunciado de alguns teoremas importantes. Mostra-se como os teoremas são susceptíveis de aplicação no estabelecimento de condições de unicidade e na solução aproximada de equações daquele tipo.

SYNOPSIS

Using a physical reasoning the basic results for the maximum principles in partial differential equations of second order of elliptic type are established. A summary of some fundamental theorems is presented and it is shown how they can be used for the demonstration of conditions of unicity, and also on the construction of approximate solutions.

0. INTRODUÇÃO

A formulação matemática dum fonómeno físico envolve sempre aproximações que ficam subjacentes mesmo quando a solução matemática exacta se obtém nas premissas do modelo. Na maioria dos casos, porém, a solução é inacessível ou demasiado complexa e laboriosa para ter interesse prático, bastando o conhecimento duma solução matemática aproximada ou até, em muitas circunstâncias, apenas a forma geral da solução e algumas das suas propriedades. Em todos os casos é manifesto o interesse que haveria em obter uma estimativa do erro cometido. É nesta perspectiva que a presente contribuição se integra, e nela se pretende chamar a atenção para a aplicação prática de alguns teoremas no domínio da teoria das equações às derivadas parciais de segunda ordem, de tipo elíptico e parabólico, que desempenham um papel importante na demonstração de propriedades gerais, como a da unicidade da solução para certo tipo de condições impostas, e que, não apenas pela natureza dos textos em que se apresentam como pelo seu caracter muitas vezes abstracto, parecem ter eclipsado a possibilidade da sua utilização em situações bem concretas.

Alguns dos teoremos que se vão apresentar têm aspectos que, sob o ponto de vista físico, são tão intuitivos que algumas conclusões, para uns quantos leitores, roçam pela banalidade. E muitas vezes terá sido esse carácter evidente, sob o ponto de vista físico, que inspirou a demonstração matemática rigorosa, que por sua vez gerou demonstrações e conclusões que não possuem já, de modo algum, esse carácter evidente.

Não é nosso objectivo fazer as demonstrações: apenas se enunciarão os teoremas e se farão algumas aplicações imediatas.

(*) Matéria integrada num curso de pós-graduação regida no Imperial College (Universidade de Londres) a convite do Departamento de Engenharia Mecânica.

1 — RESULTADOS FÍSICAMENTE INTUITIVOS

1.0 — Considere-se como exemplo introdutório a equação de Laplace

$$1) \quad \nabla^2 \phi = 0$$

num domínio D, limitado. Um dos teoremas referidos, conhecido como «princípio de máximo» diz-nos que:

> «se ϕ atingir o seu máximo, M, num ponto de D, então $\phi = M$ em todo o domínio».

O resultado é imediato se interpretarmos ϕ, por exemplo, como o campo das temperaturas num sólido homogéneo e isótropo de condutibilidade térmica constante e sem fontes de calor. Efectivamente, em regime estacionário, o campo das temperaturas ϕ rege-se por 1).

Ora se o regime é estacionário, o fluxo de calor

$$q = -k \text{ grad } \phi$$

não varia no tempo; se ϕ tem um máximo em M, pelo segundo princípio da Termodinâmica haverá dos pontos a temperatura mais elevada um fluxo de calor para os restantes, a temperatura inferior. Como em D não há fontes de calor, pelo primeiro princípio da Termodinâmica a temperatura em M diminui, o que contradiz a hipótese base do regime ser estacionário, único caso em que 1) representa o campo das temperaturas.

Conclui-se pois que $q = k \text{ grad } \phi = 0$ e portanto ϕ só pode ser constante.

O raciocínio repete-se «mutatis mutandis» para o caso dum mínimo.

Se ϕ no interior do domínio não é constante, como também não pode possuir em D nem máximo nem mínimo, conclui-se que estes se verificarão na sua fronteira B (o que é também físicamente intuitivo).

1.2 O teorema é susceptivel duma aplicação prática imediata do seguinte modo:

Suponhamos que se pretende determinar ϕ tal que

$$1) \quad \nabla^2 \phi = 0 \qquad x \subset D$$
$$\phi = F(x) \qquad x \subset B$$

E que se conhece uma função Θ, obtida por exemplo da solução dum problema análogo, em que

$$2) \quad \nabla^2 \Theta = 0 \qquad x \subset D$$
$$\Theta = F_1(x) \qquad x \subset B$$

Se $F_1 \neq F_2$, Θ não é òbviamente solução de 1). Todavia, o teorema permite-nos conhecer o erro máximo que resulta de adoptar Θ como solução de 1).

Efectivamente, seja

$$v = \phi - \Theta$$

pelo que $\nabla^2 v = 0$

Como o máximo e o mímino de v se verificam na fronteira B, será

$$v_{max} = \max(F_1 - F)$$
$$v_{min} = \min(F_1 - F)$$

e como v representa o erro de tomar Θ como solução de 1) as expressões anteriores dão os limites do erro máximo

$$\min(F_1 - F) \leqslant \varepsilon_{max} \leqslant \max(F_1 - F) \text{ (1)}$$

1.2.1 — O teorema é ainda usado ìmplicitamente sempre que se exprime matemàticamente a forma do domínio ou a condição imposta: quando se considera p. e. uma placa como limitada por dois planos a situação física é mais complexa porque as superfícies nunca são rigorosamente planas, no sentido matemático; de igual modo, a temperatura, mesmo admitida uniforme, nunca o é rigorosamente, de que resultará que em relação à solução matemática obtida existirá sempre um certo erro. O teorema permite-nos fixar os limites do erro, do seguinte modo:

---

(1) Òbviamente, se $\min(F_1 - F) < 0$, o maior desvio por defeito será $\min(F_1 - F)$ e por excesso será $\max(F_1 - F)$ pois que na expressão se consideram os sinais respectivos. Considerando $|F_1 - F|$ será

$$\varepsilon_{max} = \pm \max(F_1 - F)$$

sejam A e A′ as superfícies reais que definem um domínio D′ de Fronteira $B_1 + B_2'$ (Fig. 1).

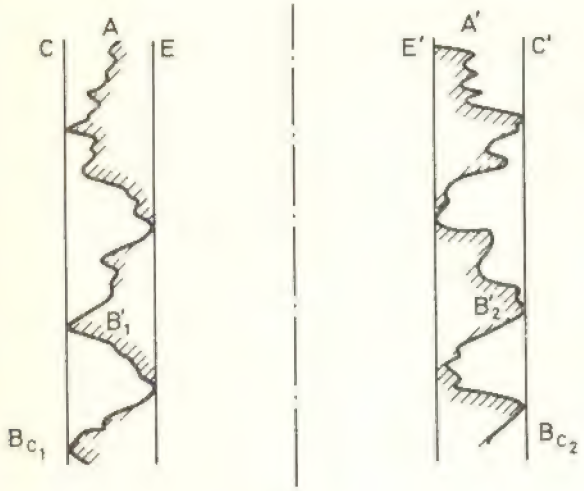


Fig. 1

Considerem-se agora os planos C e C′ definindo um domínio D_c de fronteira B_c e tal que $D_c \subset D'$, e anàlogamento os planos E e E′ definindo D_E de fronteira B_E e tal que $D' \subset D_E$.

Admitamos que a condição imposta em B_1' é $T = T_1$ e em B_2', $T = T_2$ de que resultaria a solução $T = F(P)$.

Admitamos agora as mesmas condições impostas, respectivamente em B_{c1} e B_{c2} e seja $T_1 = F_1(P)$ a solução, e anàlogamente em B_{E1} e B_{E2} e seja $T_2 = F_2(P)$ a solução nesse caso

Do teorema resulta que

$$T_1 \leqslant T \leqslant T_2$$

pelo que o erro máximo de ter substituído a superfície real por planos seria

$$\varepsilon_{max} = \pm \max (T_1 - T_2)$$

De modo inteiramente análogo se consideraria o caso se ter tomado como condição imposta uma temperatura uniforme quando a não uniformidade é $\varepsilon_T = \pm |\Delta T|$. A conclusão seria que o erro máximo na solução seria menor ou igual a ε_T.

O erro máximo resultante da presença simultânea de irregularidade da superfície e da não uniformidade da temperatura obtém-se imediatamente por combinação dos anteriores.

1.2.2 — O resultado anterior mostra como se poderá formalmente demonstrar que a solução depende contìnuamente dos dados do problema, propriedade fundamental na descrição matemática de qualquer sistema físico.

1.2.3 — Como já se referiu, o princípio do máximo é utilizado muitas vezes na demonstração na unicidade da solução. A título exemplificativo considere-se o caso mais simples de condições de DIRICHELET — Temperatura imposta em toda a fronteira B do domínio ([2]).

O problema formula-se matemàticamente como:

Determinar ϕ tal que

$$3) \quad \nabla^2 \phi = 0 \qquad x \subset D$$

$$4) \quad \phi = F(x) \qquad x \subset B$$

Admitamos que ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções satisfazendo 3) e 4).

Então, dada a linearidade de 3)

$$5) \quad v = \phi_1 - \phi_2$$

também satisfaz $\nabla^2 v = 0$

Por outro lado, de 5) e 4)

$$v = 0 \qquad x \subset B$$

Pelo teorema enunciado o máximo e o mínimo de v verificam-se na fronteira; como $v = 0$ na fronteira, segue-se que v é idênticamente nulo e portanto

$$\phi_1 = \phi_2$$

em todo o domínio o que prova a unicidade da solução para condições de Dirichelet.

Para condições de segunda e terceira espécie a demonstração é análoga a partir da generalização do teorema, como adiante se referirá.

([2]) A demonstração matemática rigorosa implica algumas restrições quanto à regularidade do domínio e quanto à continuidade e diferenciabilidade da solução. Fisicamente, pelo menos no domínio da transmissão do calor, tais condições verificam-se sempre e não se analisam, dada a finalidade da exposição em que não cabe a consideração de soluções generalizadas.

1.3 Até agora limitamo-nos a considerar a equação de Laplace. Sucede que, quando se procuram soluções aproximadas para

$$6) \quad \nabla^2 \phi = 0$$

sujeito a certos tipos de condições aos limites, se é levado a propor como solução aproximada

$$\varphi \sim \phi$$

mas em que:

$$7) \quad \nabla^2 \varphi = R(x) \neq 0$$

pelo que φ não verifica a equação diferencial, dada a existência do resíduo

$$R = R(x)$$

Por hipótese suponhamos que φ verifica as condições impostas na fronteira e que $R(x) \leqslant 0$ em todo o domínio.

Atendendo ao significado físico de 7), φ corresponde ao campo das temperaturas num sólido com fontes de calor de potência

$$8) \quad Q = -\rho c . R$$

se $R \leqslant 0$, $Q \geqslant 0$, pelo que fìsicamente se conclui que

$$\varphi \geqslant \phi$$

pois que ϕ corresponde ao campo das temperaturas num sólido idêntico, sujeito aos mesmos constrangimentos na fronteira, mas sem fontes de calor positivas. Estas tornam a temperatura necessàriamente superior em cada ponto.

Anàlogamente, se $R \geqslant 0$, as fontes serão negativos (poços) e

$$\varphi \leqslant \phi$$

Com o exemplo anterior deu-se sentido físico ao resíduo R e introduziu-se a equação de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = R$$

Naturalmente, se as condições fronteiras forem idênticas entre φ que satisfaz a equação anterior e ψ que satisfaz

$$\nabla^2 \psi = R_1$$

existirão as seguintes relações:

$$\text{Se } R_1 \leqslant R \qquad \psi \geqslant \varphi$$
$$R_1 \geqslant R \qquad \psi \leqslant \varphi$$

o que é fìsicamente evidente em face do significado de R, p. ex. em condução do calor.

1.3.1 — Interpretando R como uma fonte de calor, os seguintes princípios de máximo são também evidentes:

Se $R > 0$, o máximo de φ verifica-se na fronteira (pois as fontes são negativas)

Se $R < 0$, o mínimo de φ verifica-se na fronteira.

2. — GENERALIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM DO TIPO ELÍPTICO

2.0 — Introduzido heurìsticamente o princípio do máximo para a equação de Laplace e esboçado como se constroem limites para a sua solução e para a equação de Poisson, apresentar-se-á seguidamente a generalização dos resultados para equações mais gerais de segunda ordem do tipo elíptico ([3]).

2.1 — Considerem-se os operadores diferenciais de segunda ordem do tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

e façamos

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$$

pelo que a expressão anterior se pode escrever

$$(2.1) \qquad L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$a_{ij} = a_{ji} \qquad i,j = 1,2 \ldots n$$

([3]) Não se apresentam as demonstrações porque a finalidade é apresentar teoremas susceptiveis de aplicação prática e não o desenvolvimento do formalismo que permitiu a sua dedução.

o operador (2.1) diz-se elíptico no ponto $x = (x_1 \ldots\ldots x_n)$ se a matriz simétrica

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

for positiva definida no ponto x.

O operador é elíptico no domínio D se for elíptico em cada ponto do domínio. Tal significa que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j = \mu\,(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

sendo ξ_i, ξ_j qualquer par de números reais.

O operador é uniformemente elíptico em D se existir uma constante positiva μ_o tal que

$$\mu\,(x) \geqslant \mu_o \quad \text{para todo o } x \subset D$$

2.2 — Considere-se a desigualdade

$$(2.2) \qquad L\,[u] \equiv \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} > 0 \qquad x \subset D$$

se u for estacionário num ponto $z_1 \ldots z_n$ será nesse ponto

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x_i = z_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots n$$

e se esse ponto for um máximo deverá ser

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right)_{x_i = z_i} < 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Desigualdade que não pode ser satisfeita no domínio se o operador for elíptico nesse domínio. Deste modo, qualquer função que verifique (2.2) não pode ter um máximo no domínio.

Admitiremos em toda a exposição seguinte que u é uma função contínua possuindo derivadas contínuas até pelo menos à segunda ordem (u é de classe $C^{(2)}$). As funções que figuram no operador são contínuas, o domínio D é limitado e a sua fronteira B é contínua, pelo menos por troços. (4)

Teorema 1: seja

$$L\,[x] \equiv \sum a_{ij}\,(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_i b_i\,(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0$$

num domínio D em que L é uniformemente elíptico. Supunhamos que os coeficientes a_{ij} e b_i são uniformemente limitados. Então, se u atingir um máximo M num ponto de D, $u \equiv M$ em D [2]

Teorema 2: seja

$$(L + h(x))\,[u] \equiv \sum_{ij} a_{ij}\,(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_i b_i\,(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)\,u \geqslant 0$$

com $h \leqslant 0$, L uniformemente elíptico em D e a_{ij}, b_i, h limitados. Se u tiver um máximo não negativo no interior de D, então $u \equiv M$ [2]

Teorema 3: seja

$$\begin{aligned} (L + h)\,[u] &= f && x \subset D \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\,u &= g_1 && x \subset B_1 \\ u &= g_2 && x \subset B_2 \\ & && B = B_1 + B_2 \end{aligned}$$

Se L é uniformemente elíptico, $h(x) \leqslant 0$ é limitado, e $\alpha(x) \geqslant 0$ o problema tem uma solução única excepto quando $h \equiv \alpha \equiv 0$ e $B_2 = 0$, caso em que a solução é única a menos numa constante [3]

---

(4) No caso do teorema 3 exige-se que em cada ponto da fronteira exista uma hiperesfera tangente totalmente contida em D.

Sob o aspecto aplicado, as restrições não são importantes. Sob o aspecto formal, algumas restrições podem remover-se.

Teorema 4: seja u tal que:

$$(L+h)\,[u] = f(x) \qquad x \subset D$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\,u = g_1(x) \qquad x \subset B_1$$

$$u = g_2(x) \qquad x \subset B_2 \quad e \quad B = B_1 + B_2$$

e z_1 tal que:

$$(L+h)\,[z_1] \leqslant f(x) \qquad x \subset D$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial n} + \alpha(x)\,z_1 \geqslant g_1(x) \qquad x \subset B_1$$

$$z_1 \geqslant g_2(x) \qquad x \subset B_2$$

$$B = B_1 + B_2$$

então, se $h(x) \leqslant 0$ e $\alpha(x) \geqslant 0$ (5)

$$u(x) \leqslant z_1(x) \qquad x \subset D$$

Anàlogamente, se z_2 é tal que

$$(L+h)\,[z_2] \geqslant f(x) \qquad x \subset D$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial n} + \alpha(x)\,z_2 \leqslant g_1 \qquad x \subset B_1$$

$$z_2 \leqslant g_2 \qquad x \subset B_2$$

e $h \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$

então $\qquad z_2(x) \leqslant u(x)$

Teorema 5: seja λ um valor próprio de

$$(L+h+\lambda k)\,[u] = \sum_{ij} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i} + \sum_i b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + [h(x) + \lambda\,k(x)]\,u = 0 \qquad x \subset D$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\,u = 0 \qquad x \subset B_1$$

$$u = 0 \qquad x \subset B_2$$

$$B_1 + B_2 = B$$

e $k(x) > 0$, n normal exterior.

Seja $w(x)$ numa função positiva em $D + B$ e tal que

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x)\,w \geqslant 0 \qquad x \subset B_1$$

Então, a parte real de λ

$$R_e\,\lambda \geqslant \inf_{x \subset D} \frac{-(L+h)\,w}{kw}$$

(isto é, a parte real do valor próprio é superior ao menor valor de $\dfrac{-(L+h)\,w}{kw}$ calculado para todos os pontos do domínio).

3. LIMITES PARA AS DERIVADAS DE FUNÇÕES HARMÓNICAS

3.0. Qualquer função u que satisfaça a equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$ no domínio D é, por definição, harmónica nesse domínio.

De igual modo, se a função u verifica $\nabla^2 u \geqslant 0$ em D é subharmónica em D, ou simplesmente subharmónica. Se $\nabla^2 u \leqslant 0$ será, pelo contrário superharmónica.

Do teorema do máximo resulta imediatamente que se v é harmónica, v^2 é subharmónica. Efectivamente

$$\nabla^2(v^2) = 2\,v\,\nabla v + 2\sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$$

$$= 2\sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \leqslant 0$$

o que significa, portanto, que

$$v^2 \leqslant v \qquad x \subset D$$

$$\text{se } v = 0 \qquad x \subset B$$

$$\text{ou } v = 1 \qquad x \subset B$$

3.1 — Se u é harmónica, também o é cada uma das suas derivadas $\varphi_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, como fàcilmente se verifica, pelo que às suas derivadas também é aplicável o princípio do máximo. Em particular,

(5) A condição $\alpha \geqslant 0$ verifica-se sempre em transmissão do calor como consequência do segundo princípio da Termodinâmica.

como a soma de funções subharmónicas ainda é subharmónica, segue-se que

$$\left| g \text{ rad } u \right|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$$

é também subharmónica.

Em condução do calor, como a densidade de fluxo é

$$q = - k \text{ grad } T$$

e em regime estacionário sem fontes T é harmónico, q é superharmónico, pois $k > 0$.

3.2. — Seja u (x, y) uma função harmónica em D, e K_R um circulo de centro (x_o, y_o) e raio r contido em D.

Então

$$\iint_{K_r} \nabla^2 u \, d x \, d y = \iint_{K_r} \text{div } (\text{grad } u) \, dx \, dy =$$

$$= \oint_{c_R} \frac{\partial u}{\partial r} ds = 0$$

sendo ds o elemento de arco ao longo de c_r, circunferência que limita K_r.

Em coordenadas polares

$$\oint \frac{\partial u}{\partial r} ds = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d \theta = 0$$

como $r \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d \theta = 0$$

Integrando agora entre o e R e permutando a ordem de integração

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta \quad dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} u (R, \theta) R \, d \theta - 2 \pi u (x_o, y_o) = 0$$

ou seja

$$u (x_o, y_o) = \frac{1}{2 \pi R} \int_0^{2\pi} u (R, \theta) R \, d \theta =$$

$$= \frac{1}{2 \pi R} \oint_{c_r} uds$$

expressão que constitui o teorema do valor médio para funções harmónicas.

O resultado pode ainda exprimir-se do seguinte modo, multiplicando por R integrando de novo entre 0 e R:

$$u (x_o, y_o) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{K_r} u \, d A$$

considerando agora que $\frac{\partial u}{\partial x}$ também é uma função harmónica resulta que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o, y_o} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{K_R} \frac{\partial u}{\partial x} d A$$

e pelo teorema da divergência aplicado ao segundo membro

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o, y_o} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} u (x_o + R \cos \theta, y_o + R \text{ sen } \theta) R \cos \theta \, d \theta$$

Como se verifica o princípio de máximo, pode afirmar-se que

$$m \leqslant u \leqslant M$$

sendo m e M respectivamente o mínimo e o máximo de u em B. Por consequência a desigualdade verifica-se em D e portanto em K_r. Por outro lado, se u é harmónica,

$$u + \frac{1}{2} (M + m)$$

também o é pelo que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x_o, y_o} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left[u - \frac{1}{2} (M + m) \right] .$$

$$. R \cos \theta \, d \theta \leqslant \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \left| u - \frac{1}{2} (M + m) \right| \cos \theta \, d \theta$$

e como $u \leqslant M$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \leqslant \frac{1}{\pi R} \frac{M-m}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \theta \right| d\theta = \frac{2(M-m)}{\pi R}$$

Dado que a direcção x escolhida é arbitrária, o limite ainda é válido para o caso em que a direcção escolhida coincide com o gradiente de u, pelo que

$$\left| \text{grad } u(x, y) \right| \leqslant \frac{2(M-m)}{\pi R}$$

sendo R a distância mínima do ponto (x,y) à fronteira de D.

3.3 — No caso dum domínio tridimensional obter-se-ia

$$\left| \text{grad } u(x, y, z) \right| \leqslant \frac{3}{8R} (M-m)$$

Sendo R o raio da maior esfera de centro em (x, y, z) contida no domínio e M e m o máximo e o mínimo de u em B [3].

3.3.1 — O limite indicado em 3.2 e 3.3 perde o seu valor à medida que o ponto se aproxima da fronteira porque então $R \longrightarrow 0$.

Suponhamos, todavia, que a condição imposta na fronteira é

$$u = g(x, y)$$

e que g (x, y) é de classe $C^{(2)}$ em D + B.

Admitimos ainda que a fronteira não possui ângulos reinterantes de tal modo que por cada $x \subset B$ é possível fazer passar um círculo de raio ρ exterior a D. Considere-se ainda, concêntrico com o círculo anterior, um círculo de raio R tal que nele se contenha todo o domínio D.

Demonstra-se então [3] que para qualquer ponto:

$$\left| \text{grad } u(x, y) \right| \leqslant \max_{\text{em } B} \left| \text{grad } g \right| + \sup_{\text{em } D} \left| \nabla^2 g \right| \cdot \frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \log R}{4\rho \log \left(\frac{R}{\rho}\right)}$$

Em particular, se o domínio for convexo, ρ pode tender para ∞ e obtém-se

$$\left| \text{grad } u \right| \leqslant \max_{\text{em } B} \left| \text{grad } g \right| + \frac{d}{2} \sup_{\text{em } D} \left| \nabla^2 g \right|$$

válido para qualquer número de dimensões, e sendo d a distância máxima entre dois pontos quaisquer em D.

4 — ALGUMAS APLICAÇÕES

4.0 — O teorema 3 tem interesse imediato na medida em que nos garante a unicidade da solução para as condições fronteiras habituais em transmissão do calor.

Os teoremas 1, 2, e 4 permitem não só justificar, como determinar os limites dos erros que se cometem nas simplificações quanto a geometria e condições impostas que é usual fazer nas aplicações. Em particular, a possibilidade de estimativa do erro permitirá a introdução segura de outras aproximações que a natureza e finalidade da solução aconselham sem a incerteza que por vezes decorre da mera intuição.

Uma aplicação imediata do teorema 5 encontra-se em problemas de regime transiente em condução do calor em que a solução se procura pelo método de separação de variáveis. O teorema permite uma estimativa do limite inferior da velocidade de arrefecimento. Combinado com o método de Ritz, que forma um limite superior, possibilita o estabelecimento expedito de limites superior e inferior; limites do mesmo tipo podem ser determinados para a extensão da região de entrada térmica numa conduta de secção arbitrária. Citam-se dois exemplos em transmissão do calor, que se poderiam multiplicar e estender a outros domínios.

4.1 — A título de exemplo, considere-se a determinação expedita dos limites de temperatura numa placa rectangular em que duas faces estão à temperatura T = 0 e as outras a T = 1. (Fig. 2)

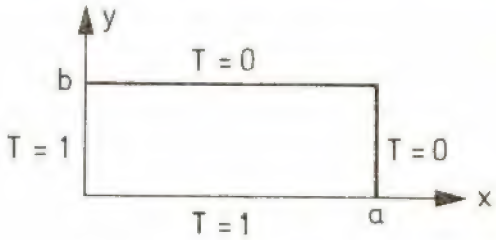
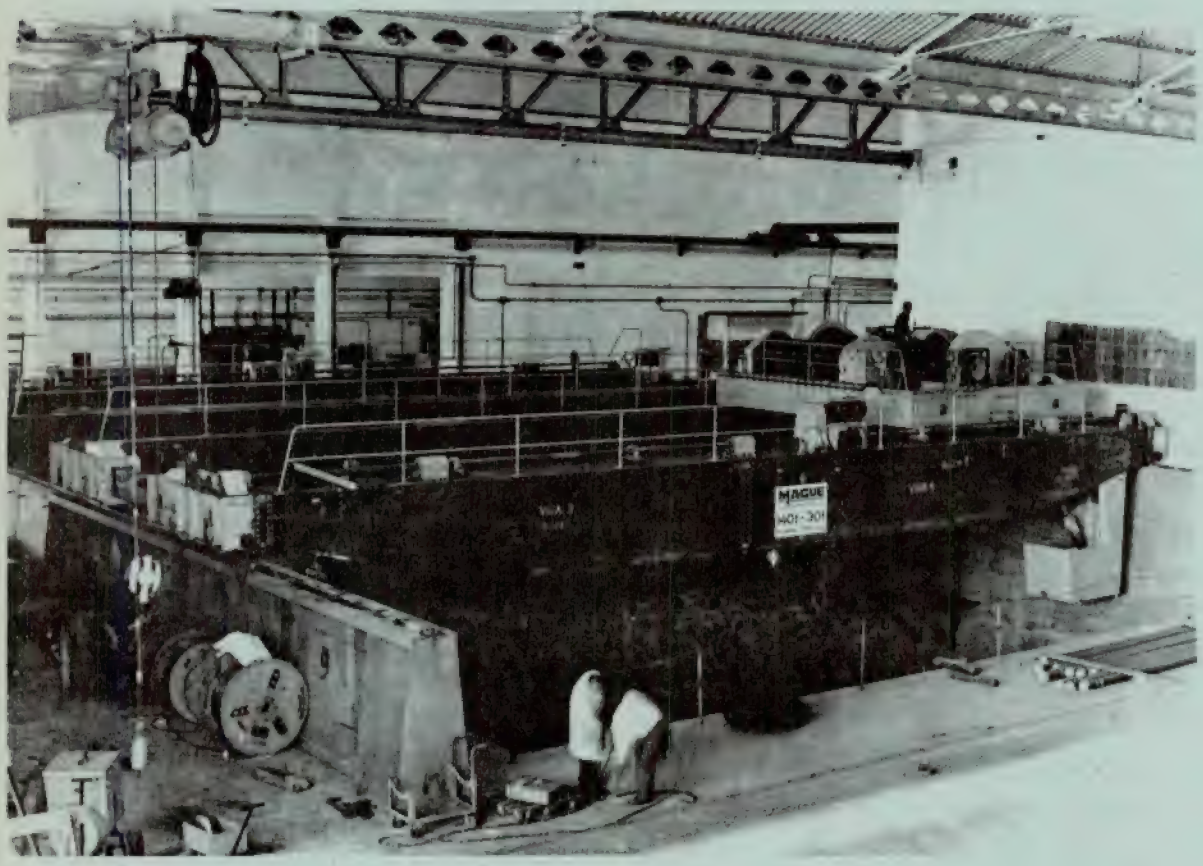


Fig. 2

MAGUE



UMA DAS DUAS PONTES ROLANTES DE 140t - 30t/20,5 FORNECIDAS À COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD, S.A. PARA A SUA CENTRAL DE MALPASO (MÉXICO)

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*

TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*

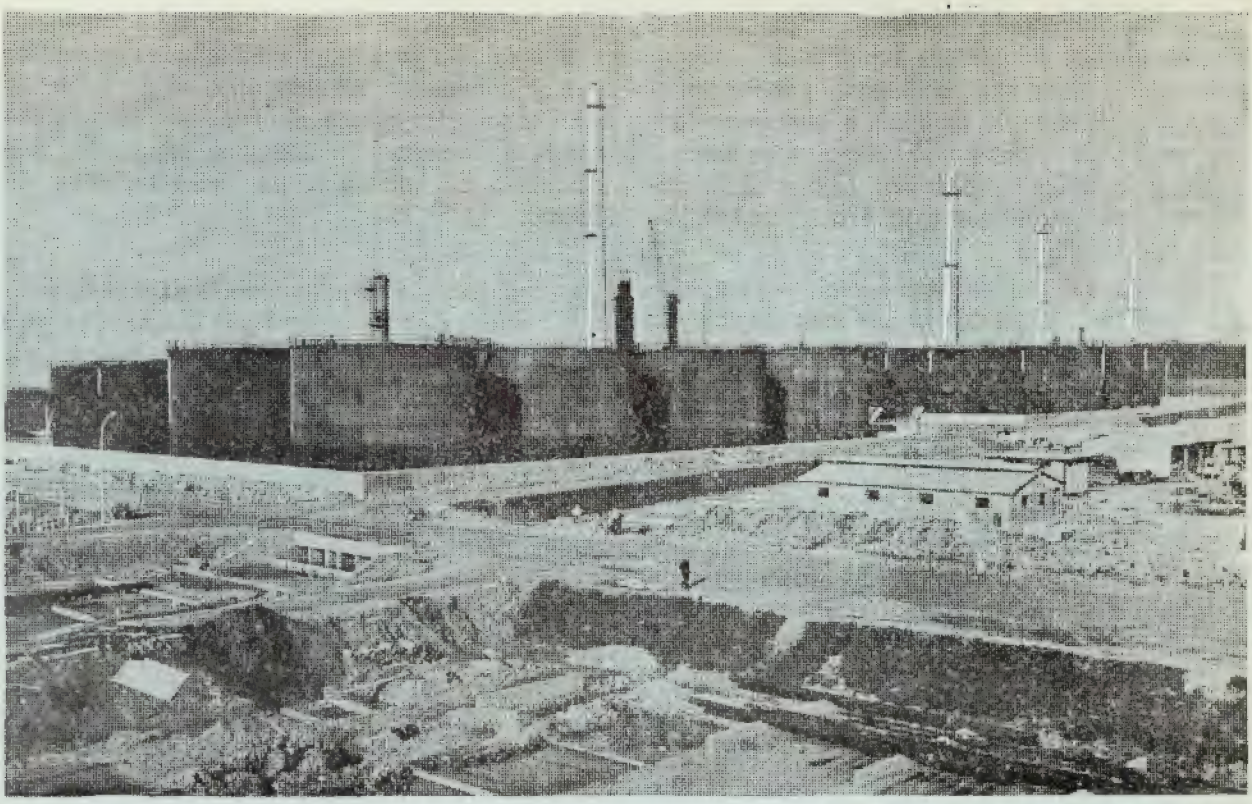
TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*

CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*

EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL



SACOR — REFINARIA DO NORTE
TANQUES PARA LUBRIFICANTES

- ALTERNADORES (de potência superior a 2000 kVA), COMPENSADORES SÍNCRONOS, MOTORES DE GRANDE POTÊNCIA (fabricação parcial).
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS QUÍMICAS E PETROQUÍMICAS
  Tubagens, tremonhas, reactores, permutadores, cisternas, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS PETROLÍFERAS
  Torres, balões, permutadores, filtros, aerorefrigerantes, tubagens, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS CIMENTEIRAS
  Fornos, moinhos, separadores, arrefecedores, etc.
- RESERVATÓRIOS
  De tecto fixo e tecto flutuante, de alta e baixa pressão. Para gases liquefeitos. Gasómetros
- EQUIPAMENTOS DE MANUTENÇÃO E TRANSPORTE
  Elevadores de alcatruzes, elevadores de palhetas, transportadores de tela metálica e de borracha, contentores, etc.
- ESTRUTURAS METÁLICAS
  Pontes, cimbres, coberturas, pisos, edifícios industriais, etc.
- MONTAGENS PESADAS

SEPSA SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTRO-MECÂNICAS, S.A.R.L.
APARTADO 8 • LEÇA do BAILIO • TELEX SEPSA P 2616

O campo das temperaturas satisfará

$$4.1) \qquad \nabla^2 T = 0$$

e às condições aos limites indicadas

4.1.1 — Em primeira aproximação, vejamos o efeito da placa ser finita segundo uma das dimensões.

Se $a \to \infty$, o problema seria unidimensional e teríamos

$$T_1(y) = 1 - \frac{y}{b}$$

Vejamos a relação entre T e T_1:

como $\nabla^2 T_1 = 0$

e T_1 satisfaz as condições fronteiras em $y = 0$ e $y = b$, o desvio máximo verificar-se-á em $x = 0$ e $x = a$

Como imediatamente se conclui,

$$T_1 < T \text{ em } x = 0$$
$$T_1 > T \qquad x = a$$

pelo que T_1 não é limite superior nem inferior de T.

Anàlogamente se conclui para T_2 se T_2 for solução do problema unidimensional

$$\frac{d^2 T}{d x^2} = 0$$

$$T = 1 \qquad y = 0$$
$$T = 0 \qquad y = a$$

4.1.2 — Consideremos agora a solução

$$T^* = T_1 \cdot T_2$$

Como $T_1 = T_1(y)$ e $T_2 = T_2(x)$, T^* verifica 4.1 e portanto é harmónica.

Por outro lado, T^* verifica as condições impostas em $x = a$ e $y = b$ mas

$$T^* \leqslant T \quad \text{em } x = 0$$
$$y = 0$$

pelo que $T^* \leqslant T$ em todo o domínio.

O produto de soluções dos problemas unidimensionais constitui pois um limite inferior.

4.1.3 — A construção dum limite superior pode obter-se propondo

$$T_3 = 1 - \frac{y}{b}\left(e^{0,693\frac{x}{a}} - 1\right)$$

a qual verifica as condições aos limites em $x = 0$ e $y = 0$.

Além disso $T_3 \leqslant 0$ (supondo $a > b$) em $x = a$ e $y = b$.

Por outro lado

$$\nabla^2 T_3 = -\frac{y}{b}\left(\frac{0,693}{a}\right)^2 e^{0,693\frac{x}{a}} > 0$$

Pelo que podemos concluir que

$$T \leqslant T_3$$

Combinando este resultado com o anterior:

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) \leqslant T \leqslant 1 - \frac{y}{b}\left(e^{0,693\frac{x}{a}} - 1\right)$$

A estimativa para T deve considerar-se ilustrativa. Tanto o limite superior como o inferior podem ser aproximados usando outras funções, cuja forma dependerá muitas vezes da intuição física que se tiver da solução.

4.2 — Considere-se como segundo exemplo o caso de uma barra quadrada de lado 2 com fontes uniformemente distribuídas, $Q = 4$, cuja fronteira se mantém a $T = 0$.

Matemàticamente será determinar T tal que

$$4.2) \qquad \nabla^2 T = 4 \quad \text{para } |x| < 1, |y| < 1$$

$$T = 0 \quad \text{para } |x| = 1 \text{ e } |y| = 1$$

o problema é equivalente à determinação de u tal que

$$4.3) \qquad \nabla^2 u = 0 \qquad x, y \subset D$$

$$u = x^2 + y^2 \qquad x, y \subset B$$

Pois, como se verifica fàcilmente

$$T = u + x^2 + y^2$$

Satisfaz 4.2) se u satisfizer 4.3.

Admitamos como função de aproximação

$$4.4) \qquad v = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$$

onde

$$v_1 = \text{parte real de } (x + iy)^4$$
$$v_2 = \text{parte real de } (x + iy)^8$$

sendo a_0, a_1 e a_2 constantes a determinar.

As funções v_1 e v_2 são harmónicas, como o é a parte real e a imaginária de qualquer função analítica de variável complexa.

Pelo teorema do máximo, o erro máximo e mínimo de tomar v por u verificar-se-á na fronteira. O método consiste pois, simplesmente, em calcular $| v-u |$ na fronteira e escolher a_0, a_1, a_2 de tal modo que $E_{máx} \leqslant | v-u |$ seja mínimo.

Traçando a curva de v - u para cada lado (dada a simetria do problema basta neste caso traçar para um deles por exemplo, $y = 1$) e considerando apenas $v = a_e + a_1 v_1$ obtém-se, se $a_0 = 1{,}175$ e $a_1 = 0{,}2$ que $| 1{,}75 - 0{,}2\, v_1 (x^2+1) | \leqslant 0{,}025$ e portanto que $| u - v | \leqslant 0{,}025$ Considerando agora $v = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$ e após ajustamento [5] se escolher $v = 0{,}1786 - 0{,}1801\, v_1 + 0{,}006\, v_2$ verifica-se que em $y = 1$

$$| v - u | \leqslant 0{,}005$$

que seria portanto o erro máximo cometido no domínio. A solução está portanto contida entre

$$0{,}1786 - 0{,}1801\, v_1 + 0{,}006\, v_2 + x^2 + y^2 - 0{,}005 \leqslant T \leqslant 0{,}1786 - 0{,}1801\, v_1 + 0{,}006\, v_2 + x^2 + y^2 + 0{,}005$$

Por exemplo, em $x = y = 0$ será

$$1{,}1736 \leqslant T(0{,}0) \leqslant 1{,}1836$$

4.3 — Os exemplos anteriores mostram sumàriamente como os teoremas são susceptíveis de aplicação prática. O seu carácter elementar não revela porém completamente a sua potencialidade. Refira-se, em particular, a combinação com outros métodos de solução aproximada que se tenciona apresentar oportunamente. Estes facilitam a construção mais expedita de funções de aproximação da solução usada. Os teoremas de máximo permitem, através da fixação de alguns parâmetros dessas funções, a determinação dos limites do erro, aspecto basilar em qualquer solução aproximada.

BIBLIOGRAFIA

[1] Courant, R; Hilbert, D. — Methods of mathematical Physics — Interscience

[2] Hopf, E. — Elementare Bewerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter ordnung vom elliptishen typus — Sitzungsber & Prenss. Akad. & Wiss. 19 (1927) p. 147

[3] Protter, M; Weinberger — Maximum principles in Diferential Equations — Prentice-Hall.

[4] Petrowski — Partial Differencial Equations — J. Wiley

[5] Collatz, L. — The numerical treatment of differential equations — Springer.

SEISMIC DESIGN OF TRADITIONAL AND PREFABRICATED REINFORCED CONCRETE BUILDINGS

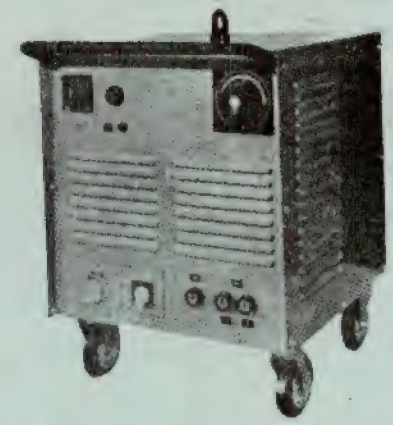
by J. FERRY BORGES and ARTUR RAVARA

Por lapso, não ficou esclarecido nas notas em pé-de-página respeitantes a este artigo (inserto no nosso n.º 392, de Novembro de 1969), que os seus autores pertencem aos quadros do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

FRAPIL

CONSTRUÇÕES E MONTAGENS ELÉCTRICAS

SARL



máquinas de soldadura eléctrica

transformadores

rectificadores de silício

processos semiautomáticos

licença

OERLIKON

SEDE E INSTALAÇÕES FABRIS

CAIS DE SÃO ROQUE
APARTADO 20
TELEFONE 23071/2
AVEIRO

DELEGAÇÃO NO SUL

RUA CASTILHO
38, r/c.-dt.
TELEFONE 52528
LISBOA-1

042.72/1658

FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.741121
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 621.375.13 : 621.373.421

REALIMENTAÇÃO EM SISTEMAS ELECTRÓNICOS LINEARES

pelo Prof. ANTÓNIO DE CARVALHO FERNANDES

(Conclusão)

4. CONFIGURAÇÕES TÍPICAS DE OSCILADORES DE REALIMENTAÇÃO

4.1 Considerações gerais. Critério de Barkhausen

Quando, em relação ao esquema básico da fig. 2.1 estabelecemos a equação básica da realimentação

$$K(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s) . A(s)} \qquad (4.1)$$

vimos ainda que, se se verificasse a condição,

$$1 = \beta(s) . A(s) \qquad (4.2)$$

o ganho total seria teòricamente infinito e o sistema seria portanto auto-excitado. Dissémos então que este era o caso dos chamados *osciladores de realimentação.*

Efectivamente a condição (4.2) oorresponde aos zeros da função complexa de variável complexa

$$F(s) = 1 - \beta(s) . A(s) . \qquad (4.3)$$

De uma maneira genérica, um oscilador de realimentação pode ser representado pelo esquema

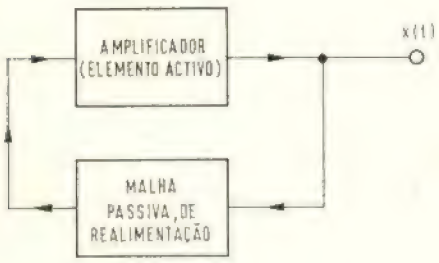


Fig 4.1

básico da fig. 4.1 que corresponde ao esquema da fig. 2.1 no caso de ser $y(t) = 0$ e $c(t) = r(t)$.

A equação (4.2) equivale à condição (4.4) que

$$\beta(s) = \frac{1}{A(s)} \qquad (4.4)$$

corresponde ao conhecido *Critério de Barkhausen* (*). Deve notar-se que o significado de $\beta(s)$ e $A(s)$ continua a ser o mesmo das equações (2.1) e (2.2) tendo em vista que o ganho $A(s)$ será, em geral, afectado pela presença da malha de realimentação.

Podemos pois dizer que há dois elementos essenciais num oscilador de realimentação: *a)* um elemento activo que, para pequenos sinais, terá comportamento linear mas que, para sinais de uma certa amplitude apresentará uma acção de não-linearidade que tende a limitar essa amplitude; *b)* uma malha de realimentação constituída por elementos passivos. Quando estes elementos são combinados num sistema de realimentação positiva — a que corresponde a condição

$$|F(s)| = |1 - \beta(s) . A(s)| < 1 \qquad (4.5)$$

o sistema tende a ser auto-excitado e qualquer regime livre acidental, que tenha lugar no circuito, levará a oscilações de amplitude crescente. Quando a não-linearidade do elemento activo influenciar o seu comportamento de tal modo que as oscilações se mantêm com amplitude constante, os parâmetros do elemento activo e da malha de realimentação serão tais que, para uma certa frequência, se verificará a equação (4.4).

É de notar que, no início das oscilações, o elemento activo tem funcionamento essencialmente linear e que é a sua não-linearidade que limita a amplitude das oscilações. Pode portanto perguntar-se: e em regime permanente, o funcionamento é ou não linear? De facto, os dispositivos dos

(*) O critério de Barkhausen foi estabelecido para o caso de osciladores usando válvulas electrónicas e em condições mais restritas.

osciladores electrónicos podem ter várias classes de funcionamento: em classe A, a operação será linear e nas classes B ou C o funcionamento dos dispositivos electrónicos será essencialmente não-linear. No nosso estudo, vamos, contudo, admitir que o funcionamento é linear e é nesta hipótese que é válida a equação (4.4).

4.2 Configurações típicas

Às quatro configurações típicas de amplificadores com realimentação corresponderão, respectivamente, quatro configurações idênticas para osciladores de realimentação; trata-se essencialmente das quatro maneiras básicas de associar o Amplificador (ou elemento activo) e a Malha de Realimentação. Os respectivos esquemas básicos são os seguintes (figs. 4.2 a 4.5), em que supomos um regime sinusoidal e admitimos portanto que as tensões e as correntes são funções da variável $s = j\omega$. O Cálculo Operacional dá assim lugar ao Cálculo Simbólico em que as tensões e as correntes são representadas pelas respectivas amplitudes complexas.

A) Ligação série (na saída) — série (na entrada)

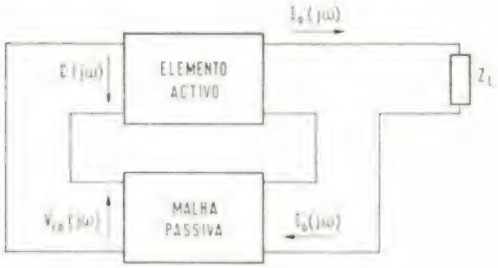


Fig. 4.2

B) Ligação derivação (na saída) — série (na entrada)

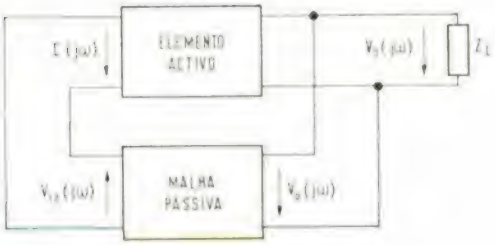


Fig. 4.3

C) Ligação derivação (na saída) — derivação (na entrada)

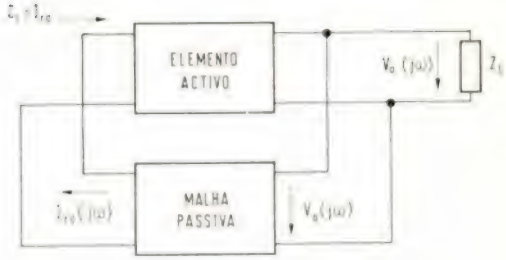


Fig. 4.4

D) Ligação série (na saída) — derivação (na entrada)

Fig. 4.5

4.3 Critério de $\Delta = 0$

Em qualquer destas configurações (figs. 4.2 a 4.5) não temos excitação exterior e, portanto, as equações relativas ao sistema são necessàriamente equações lineares e homogéneas. Para que este sistema tenha soluções não nulas, é preciso que o respectivo determinante seja nulo.

$$\Delta = 0 \tag{4.6}$$

Este é um dos critérios mais simples para a determinação das condições de oscilação. Atendendo a que os parâmetros do circuito serão números complexos (funções de $j\omega$), a condição (4.6) traduz-se assim, em geral, por duas equações.

Se, nos esquemas das figs. 4.2 a 4.5, quisermos admitir que se trata de osciladores sem carga exterior, teremos de considerar: $Z_L = 0$ nas configurações em que a ligação na saída se faz em série — caso das figs. 2 e 5; e $Z_L = \infty$ nas configurações em que a ligação na saída se faz em derivação — caso das figs. 4.3 e 4.4.

4 4 Exemplo

Como exemplo da ligação derivação-derivação (fig. 4.4), sem carga exterior, consideremos o esquema simplificado da fig. 4.6 em que o elemento activo é um andar de amplificação, com um transistor numa montagem de emissor comum, e a malha passiva de realimentação é formada pelas impedâncias Z_1, Z_2 e Z_3 que supomos serem reactivas puras.

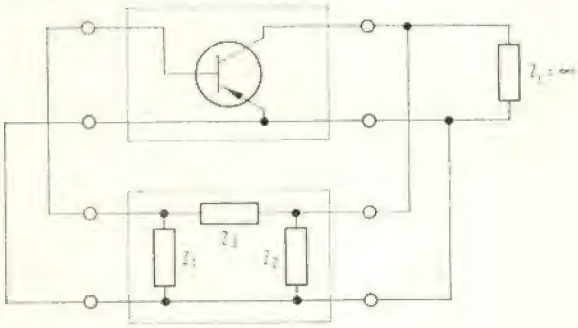


Fig. 4.6

Podemos ainda notar que, em relação ao esquema da fig. 4.4, a fig. 4.6 poderia tomar o aspecto representado na fig. 4.6-a o que equivale a admitir que $Z_L = Z_2$ e que a malha passiva de realimentação é formada apenas pelas impedâncias Z_1 e Z_2.

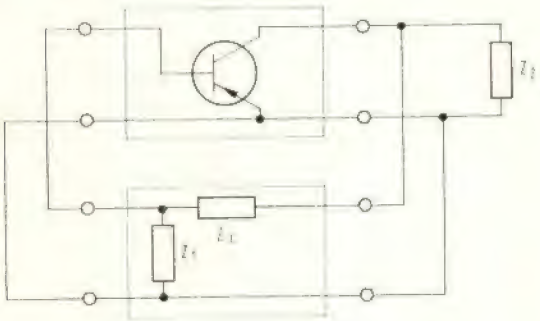


Fig. 4.6-a

No Apêndice N.º 5 fazemos o estudo deste circuito e determinamos as condições de oscilação (em regime permanente) quer a partir do critério do determinante nulo — equação (4.6) — quer a partir do critério de Barkhausen — equação (4.4). Admitindo que

$$Z_1 = j\,X_1 \quad Z_2 = j\,X_2 \quad Z_3 = j\,X_3 \tag{4.7}$$

conclui-se que deverá ser

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \tag{4.8}$$

$$X_1 = h_{fe}\,X_2 \tag{4.9}$$

Isto significa que as impedâncias X_1 e X_2 serão da mesma natureza, por exemplo, capacitivas (como no oscilador Colpitts) e, nesse caso X_3 deverá ser indutiva. O esquema simplificado do Oscilador Colpitts utilizando uma montagem de emissor comum é dado na fig. 4.7 em que

$$Z_1 = j\,X_1 = -j\,\frac{1}{\omega C_1} \tag{4.10}$$

$$Z_2 = j\,X_2 = -j\,\frac{1}{\omega C_2} \tag{4.11}$$

$$Z_3 = j\,X_3 = j\,\omega L \tag{4.12}$$

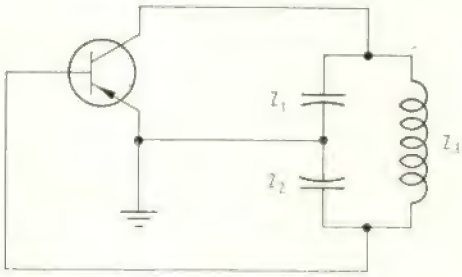


Fig. 4.7

devendo ser, portanto,

$$C_2 = h_{fe}\,C_1 \tag{4.13}$$

$$\omega^2 = \frac{C_1 + C_2}{L\,C_1\,C_2} \tag{4.14}$$

Estas condições definem-nos a relação entre as capacidades, para que o sistema possa oscilar, e dão-nos a frequência angular de oscilação; é de notar que esta é a frequência própria do circuito oscilante do esquema da fig. 4.7, que supusemos sem perdas.

Muitos outros exemplos poderiam ser citados tendo em consideração as diferentes configurações possíveis para o andar de amplificação (por exemplo de emissor comum, de base comum e de colector comum, no caso de transistores), para a malha passiva de realimentação (onde é possivel uma vasta gama de configurações e para a ligação entre estes dois elementos (como ilustrado nas

figs. 4.2 a 4.5). Nem sempre o conjunto escolhido destas configurações é compatível no sentido de poder ser auto-excitado e constituir assim um oscilador.

5. ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM REALIMENTAÇÃO

5.1 Definição de estabilidade

De um modo geral, um sistema estável permanecerá em repouso excepto quando estiver sobre a acção duma excitação exterior e voltará à situação de repouso se essa excitação for retirada. Matemàticamente, a estabilidade pode ser definida com precisão a partir da resposta à função impulsiva unitária: — *um sistema diz-se estável se a sua resposta à funcão impulsiva unitária tender para zero quando a variável tempo tender para o infinito.*

5.2 Resposta à função impulsiva unitária

Designamos por k (t) a resposta, no domínio da variável t, à função impulsiva unitária δ_0 (t) cuja transformada de Laplace é igual à unidade. Neste caso, verifica-se que k (t) é a transformada inversa de Laplace da função de transferência K (s) do sistema, como se mostra no Apêndice VI.

O problema da determinação da estabilidade de um sistema reduz-se pois ao problema de averiguar se a respectiva função k (t) (resposta à função impulsiva unitária) tende para zero quando t tender para infinito. Se considerarmos um sistema com realimentação em que a função de transferência global (ou ganho global), dada pelas equações

$$K(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{A(s)}{1-\beta(s)\,A(s)} =$$

$$= \frac{A(s)}{1-T(s)} = \frac{A(s)}{F(s)} \qquad (1)$$

o problema resumir-se-ia em determinar a respectiva tranformada inversa k (t) e averiguar, directamente, se tende para zero quando t tender para infinito.

Este procedimento implicaria, contudo, a determinação da transformada inversa de K (s), o que pode ser difícil e laborioso.

5.3 Análise da função de transferência. Critério de Routh

Por isso, têm sido propostos vários critérios com vista à determinação da estabilidade de um sistema pela análise da sua função de transferência global. Esses critérios têm, necessàriamente, em consideração as propriedades da transformação inversa de Laplace.

No Apêndice VII mostramos que a transformada inversa de uma função K (s) terá termos afectados do factor $e^{\sigma t}$ sendo $\sigma > 0$ quando a função tiver *polos* (simples ou múltiplos, reais ou complexos) situados na metade da direita do plano da variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Isto significa que, nessas condições, o funcionamento do sistema não é estável.

Obtemos assim a conclusão fundamental de que o sistema será instável se existirem *polos* da função de transferência global dada pela equação (1) na metade da direita do plano da variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Pode ainda provar-se que o sistema será estável se, e só se, não existirem, *polos* de K (s) na metade da direita do plano da variável s. O mesmo é dizer que o sistema será estável se, e só se, não existirem *zeros* da função $[1 - \beta(s)\,A(s)]$ na metade da direita do plano de s. Esta conclusão constitui o chamado *Critério de* ROUTH no domínio do Cálculo Operacional.

Daqui se conclui uma regra prática: determinar os *zeros* de $[1 - \beta(s)\,A(s)]$ e verificar se satisfazem à condição referida.

Nem sempre, contudo, é fácil fazer esta determinação. Por outro lado, em circuitos práticos, nem sempre é fácil obter as expressões analíticas, de $\beta(s)$ e A (s) mas é algumas vezes possível determinar os seus valores (em módulo e argumento) experimentalmente, em regime sinusoidal ($s = j\omega$), para diferentes valores da frequência. Daqui, a ideia de, a partir do diagrama da função $[1 - \beta(j\omega)\,A(j\omega)]$ para valores de ω variando de $-\infty$ a $+\infty$, tirar conclusões quanto à estabilidade do sistema. Vejamos que o chamado *Critério de* NYQUIST nos dá satisfação a este respeito.

5.4 Critério de Nyquist

O critério de NYQUIST, original, aplica-se ao caso especial de não haver *zeros* da função K (s) (ou polos de $[1 - \beta(s)\,A(s)]$) na metade da direita do plano da variável complexa. Este caso

especial abrange, contudo, a maior parte dos amplificadores com realimentação (para os quais o critério era originalmente destinado) e também a grande maioria dos sistemas com realimentação que se utilizam na prática. Em relação à função de transferência global, dada pela equação da realimentação (1), o critério de NYQUIST pode ser enunciado como segue:

Admitindo que não há polos de $[1 - \beta(s) A(s)]$ na metade direita do plano de s — o que se verifica na quase generalidade dos sistemas práticos com realimentação — uma condição necessária e suficiente, para a estabilidade do sistema, é que o contorno fechado que constitui o lugar geométrico, no plano $(u + j v)$ da função $[1 - \beta(j\omega) A(j\omega)]$, tomado sobre toda a gama de frequências positivas e negativas, não envolva a origem dos eixos.

Um enunciado equivalente será ainda:

O lugar geométrico da função $[\beta(j\omega) A(j\omega)]$ não deve envolver o ponto (1,0), no plano $(u + j v)$, quando ω for tomado sobre todos os valores positivos e negativos. Este segundo enunciado corresponde, evidentemente, ao primeiro, se considerarmos uma mudança na posição da origem dos eixos.

No Apêndice X dá-se um exemplo prático de aplicação deste Critério.

A demonstração do critério de NYQUIST envolve os seguintes passos essenciais:

a) A condição de estabilidade obriga, como já vimos, à função $[1 - \beta(s) A(s)]$ não ter zeros na metade da direita do plano da variável s.

b) Se uma curva fechada, no plano de *s*, envolver um número Z de *zeros* e um número P de *polos* de uma função F(s), o contorno fechado que lhe corresponde no plano da função $F(s) = u + j v$ envolverá a origem dos eixos tantas vezes quanto for o valor diferença $Z - P$. Esta afirmação demonstra-se a partir de um teorema clássico da teoria das funções de variável complexa, como se mostra no Apêndice VIII.

c) O contorno, no plano de *s*, limitado pelo eixo imaginário e por uma semicircunferência de centro na origem dos eixos e de raio infinito (chamado o *Caminho Fechado de* NYQUIST) abraçando portanto todos os *polos* e *zeros* de uma função F(s) na metade da direita do plano de *s*, transforma-se, no plano de $F(s) = u + j v$ no lugar geométrico da função $F(j\omega)$ isto é, de F(s) quando se toma $s = j\omega$, considerando todos os valores positivos e negativos da frequência. Esse lugar geométrico designa-se por *Diagrama de* NYQUIST. No Apêndice IX faz-se a demonstração desta afirmação.

d) Se a função referida em *b*) e *c*) for $[1 - \beta(s) A(s)]$ e se o contorno no plano $u + j v$ que representa o lugar geométrico de $[1 - \beta(j\omega) A(j\omega)]$ para $-\infty < \omega < +\infty$ não envolver a origem dos eixos, isso quer dizer que $Z - P = 0$. Como admitimos que $P = 0$ (na quase generalidade dos sistemas com realimentação), conclui-se que será também $Z = 0$ e que não haverá *zeros* daquela função na metade da direita do plano de *s* e, portanto, que o sistema é estável. Se o contorno envolver a origem, uma ou mais vezes, então será:

$$Z - P \geqslant 1 \qquad (2)$$

e, por ser $P = 0$, será

$$Z \geqslant 1 \qquad (3)$$

o que significa que haverá, pelo menos, um *zero* na metade da direita do plano de s e o sistema será instável.

Esta é pois a justificação do Critério de NYQUIST a que nos referimos.

É de notar que o lugar geométrico dos pontos da função $[1 - \beta(j\omega) A(j\omega)]$ no plano $u + j v$ se pode obter experimentalmente a partir de medidas de β e A (os seus módulos e os seus argumentos), sobre uma larga faixa de frequências; bastará teòricamente considerar a faixa $(0, +\infty)$ pois que haverá simetria conjugada neste diagrama, o que quer dizer que o gráfico relativo a $-\infty < \omega < 0$ é a imagem de espelho, em relação ao eixo horizontal, do gráfico relativo a $0 < \omega < \infty$.

5.5 Outros critérios

Os critérios referidos de ROUTH e NYQUIST, são muitas vezes apresentados de forma diferente da que vimos. Têm sido ainda apresentados vários outros critérios para a determinação das condições de estabilidade.

APÊNDICE V

CONDIÇÕES DE OSCILAÇÃO. OSCILADOR DE REALIMENTAÇÃO EM LIGAÇÃO DERIVAÇÃO-DERIVAÇÃO. CRITÉRIOS DE DETERMINANTE NULO E DE BARKHAUSEN.

Em relação ao esquema da fig. 4.6 (do Cap. 4), podemos traçar o esquema equivalente da fig. V.I, numa versão muito simplificada do esquema do transistor, onde I_1 e I_2 representam amplitudes complexas, em Cálculo Simbólico, e são funções da frequência angular ω. Também as impedâncias serão função de ω. As equações relativas ao circuito são:

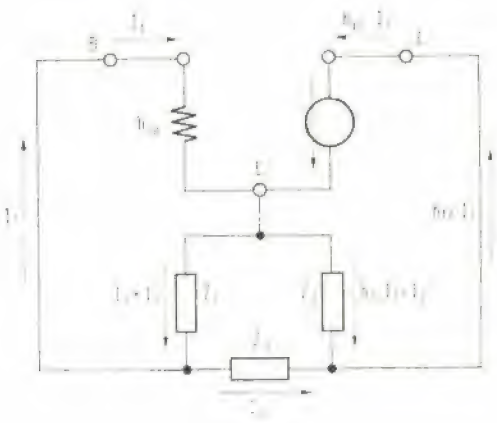


Fig. V.I

$$I_1 h_{ie} + (I_1 + I_2) Z_1 = 0 \qquad (1)$$

$$(I_1 + I_2) Z_1 + I_2 Z_3 - (h_{fe}\ I_1 - I_2) Z_2 = 0 \qquad (2)$$

a que corresponde o sistema:

$$\begin{cases} I_1 (h_{ie} + Z_1) & + I_2 Z_1 & = 0 \\ I_1 (Z_1 - h_{fe} Z_2) & + I_2 (Z_1 + Z_2 + Z_3) & = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

A condição de determinante nulo é portanto:

$$(h_{ie} + Z_1)(Z_1 + Z_2 + Z_3) - Z_1 (Z_1 - h_{fe} Z_2) = 0 \qquad (4)$$

Admitindo que

$$Z_1 = j X_1 \qquad Z_2 = j X_2 \qquad Z_3 = j X_3 \qquad (5)$$

obteremos

$$h_{ie}(X_1 + X_2 + X_3) + j\,[X_1 (X_1 + X_2 + X_3) - X_1^2 + h_{fe} X_1 X_2] = 0 \qquad (6)$$

Esta equação será satisfeita quando se verificarem as condições

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \qquad (7)$$

$$X_1 = h_{fe} X_2 \qquad (8)$$

que representam assim, as condições de oscilação.

Em relação ao esquema da fig. 4.6-a do Cap. 4. o respectivo esquema equivalente será:

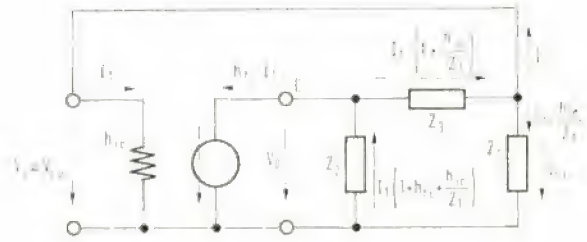


Fig. V.2

Designando por $\quad A = \dfrac{V_o}{V_i} \qquad (9)$

$$\beta = \frac{V_{ra}}{V_o}\ , \qquad (10)$$

o criterio de Barkhausen, generalizado, será

$$\beta = \frac{1}{A}\ . \qquad (11)$$

Em relação a este esquema será

$$V_i = I_1 h_{ie} \qquad (12)$$

$$V_o = -I_1 \left(h_{fe} + 1 + \frac{h_{ie}}{Z_1} \right) Z_2 \qquad (13)$$

$$A = -\frac{Z_2}{h_{ie}} \left(h_{fe} + 1 + \frac{h_{ie}}{Z_1} \right) \qquad (14)$$

$$V_{ra} = \frac{h_{ie} \parallel Z_1}{h_{ie} \parallel Z_1 + Z_3} V_o \qquad (15)$$

$$\beta = \frac{h_{ie} \parallel Z_1}{h_{ie} \parallel Z_1 + Z_3} = \frac{h_{ie} Z_1}{h_{ie} Z_1 + h_{ie} Z_3 + Z_1 Z_3} \qquad (16)$$

A condição $\beta = \frac{1}{A}$ leva assim à equação

$$h_{ie}(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_2 (1 + h_{fe}) + Z_1 Z_3 = 0 \qquad (17)$$

Fazendo

$$Z_1 = jX_1 \quad Z_2 = jX_2 \quad Z_3 = jX_3 \qquad (18)$$

será

$$jh_{ie}(X_1 + X_2 + X_3) - X_1 X_2 (1 + h_{fe}) - X_1 X_3 = 0 \qquad (19)$$

que será satisfeita quando for

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \qquad (20)$$

$$X_2 (1 + h_{fe}) = -X_3 \qquad (21)$$

ou ainda quando for

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \qquad (22)$$
$$X_1 = h_{fe} X_2$$

como já tínhamos encontrado a partir do critério de determinante nulo.

APÊNDICE VI

RESFOSTA DE UM SISTEMA, À FUNÇÃO IMPULSIVA UNITÁRIA. TRANSFORMADA INVERSA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA

Designemos por k (t) a resposta, no domínio da variável t, à função impulsiva unitária e verifiquemos que k (t) é a transformada inversa de Laplace da função de transferência K (s) do sistema.

Para concretizarmos melhor o nosso estudo, imaginemos um sistema físico cujo comportamento é traduzido pela seguinte equação diferencial linear

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i x(t)}{d t^i} = y(t) \qquad (1)$$

em que y (t) é função excitação aplicada ao sistema e x (t) é função resposta; os coeficientes a_i são constantes conhecidas. Se aplicarmos a transformação de Laplace a esta equação obteremos, no domínio da variável complexa a equação

$$X(s) = Y(s)\ K(s) + Q(s)\ K(s) \qquad (2)$$

em que K (s) é a chamada função de transferência do sistema e Q (s) é uma função que depende das condições iniciais. A função de transferência é dada pela expressão

$$K(s) = \frac{1}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \qquad (3)$$

No caso particular de ser n = 2, os valores de K (s) e Q (s) serão, respectivamente

$$K(s) = \frac{1}{a_o + a_1 s + a_2 s^2} \qquad (4)$$

$$Q(s) = (a_2 s + a_1)\ x(0) + a_2\ x'(0) \qquad (5)$$

em que x (0) e x' (0) são respectivamente, os valores de x (t) e da sua derivada x' (t) no instante inicial t = 0.

Se admitirmos como condições iniciais x (0)=0, x' (0) = 0 . . . . $x^{(n-1)}(0) = 0$, isto é, se admitirmos que o sistema está inicialmente em repouso e se admitirmos ainda que há continuidade na origem da variável e das suas derivadas até à ordem (n-1), será Q (s) = 0 e a função de transferência K (s) corresponderá ao cociente

$$K(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \qquad (6)$$

como temos considerado no nosso estudo.

Analisemos agora o caso particular de a função de excitação y (t) ser a função impulsiva unitária na origem δ_o (t) cuja transformada de Laplace é igual a 1

$$\mathcal{L}\{ y(t) \} = \mathcal{L}\{ \delta_o(t) \} = 1 \qquad (7)$$

Neste caso será

$$K(s) = X_\delta(s) \quad \text{para} \quad y(t) = \delta_o(t) \qquad (8)$$

No domínio do tempo, se designarmos por k (t) a transformada inversa da função de transferência,

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\} \qquad (9)$$

concluiremos que

$$k(t) = x_\delta(t) \qquad (10)$$

Isto significa portanto, que *a resposta de um sistema nas condições referidas, para uma excitação sob a forma da função impulsiva unitária* δ_o (t), *é igual à transformada inversa da função de transferência do sistema.* Por isso k (t) é designada por *resposta à função impulsiva unitária.*

APÊNDICE VII

LOCALIZAÇÃO DOS POLOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA GLOBAL, COMO CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DO SISTEMA

Consideremos a função de transferência global, dada pela equação básica da realimentação:

$$K(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s)\, A(s)} \qquad (1)$$

A respectiva transformada inversa será, pelo teorema da inversão

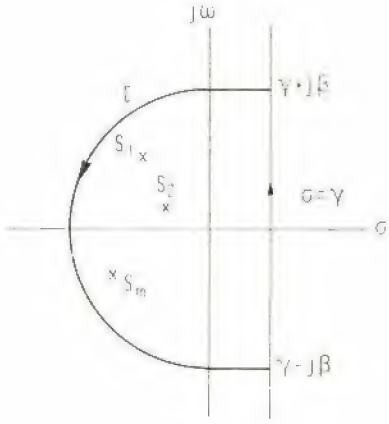
$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\gamma - j\beta}^{\gamma + j\beta} K(s)\, e^{st}\, ds \qquad (2)$$

em que K (s) deve ser uma função complexa, de variável complexa, analítica no semiplano

$$R_e[s] > \gamma\,. \qquad (3)$$

O valor de γ, no integral de inversão deve pois ser escolhido de modo que todas as singularidades de K (s) existam no semiplano $R_e[s] < \gamma$.

Admitamos agora que a função K (s) tem como *polos* os pontos $s_1, s_2 \ldots s_m$ no plano da variável complexas. Estes serão também os polos da função K (s) e^{st}. Consideremos ainda que os resíduos da função integranda, no integral de inversão, K (s) e^{st}, são, respectivamente R (s_1), R (s_2) . . . R (s_m).



Pode provar-se que, sendo c uma curva fechada formada por um segmento de recta $\sigma = \gamma$ com os extremos nos pontos $\gamma + j\beta$ e $\gamma - j\beta$ e por um arco de curva qualquer, de tal modo que no interior da região limitada por c existam todos os polos de K (s), se verifica a equação

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_{\gamma - j\beta}^{\gamma + j\beta} K(s)\, e^{st}\, ds = \oint_c K(s)\, e^{st}\, ds\,. \qquad (4)$$

Tendo agora em consideração o Teorema dos Resíduos de Cauchy

$$\oint_c F(s)\, ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{m} R(s_i) \qquad (5)$$

podemos escrever que a transformada inversa de K (s) será

$$k(t) = \sum_{i=1}^{m} R(s_i) \qquad (6)$$

que traduz o *Método dos Resíduos* para a determinação da transformada inversa de Laplace. Este método consiste em determinar os resíduos da função K s) e^{st} e obter o somatório como se estabelece na equação (6). Convém ainda referir que, se uma função F (s) for dada pelo cociente de duas funções analíticas

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \qquad (7)$$

o resíduo num polo simples s_0 é igual a

$$R(s_0) = \frac{P(s_0)}{Q'(s_0)} \qquad (8)$$

e que, dum modo geral, o resíduo num polo múltiplo, s_0 de ordem N, é igual a

$$R(s_0) = \frac{1}{(N-1)!} \left\{ \frac{d^{N-1}}{d s^{N-1}} \left[(s-s_0)^N F(s) \right] \right\}_{s=s_0} \qquad (9)$$

Temos assim uma regra prática para a determinação dos resíduos da função $F(s) = K(s)\, e^{st}$ e da transformada inversa k (t).

A determinação dos resíduos da função F (s) é facilitada quando a função K (s) é dada pelo cociente de dois polinómios

$$K(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \qquad (10)$$

em que p (s) e q (s) são polinómios sem factores em comum, sendo o grau de p (s) inferior ao de q (s). Os polos de K (s) serão agora as raizes de q (s). A determinação dos resíduos que constituem as parcelas do somatório que nos dá a transformada inversa levam às seguintes regras de aplicação prática de que tiraremos conclusões quanto ao problema em jogo de a função k (t) dever tender para zero quando t tender para infinito, para que o sistema seja estável.

a) Por cada factor $(s-s_i)$, não repetido, no denominador, isto é, para cada polo simples s_i da função K (s) haverá o termo

$$\frac{p(s_i)}{q'(s_i)} \cdot e^{s_i t} \qquad (11)$$

na transformada inversa k (t).

Para valores de S_i reais, conclui-se imediatamente que deverá ser

$$s_i < 0 \qquad (s_i \text{ real}) \qquad (12)$$

para que a resposta à função impulsiva unitária seja atenuada exponencialmente no tempo.

Para valores de $s_i \sigma_i + j\omega_i$ complexos, conclui-se também que

$$\sigma_i = \mathrm{Re}[s_i] < 0 \qquad (13)$$

Em conclusão, para que o sistema seja estável, *a função K (s) deverá ter todos os seus polos simples na metade da esquerda do plano da variável complexa definida por Re* $[s_i] < 0$.

Se nos debruçarmos sobre o caso de K (s) ter dois polos imaginários simples $+ j\omega_i$ e $- j\omega_i$ sendo, portanto, $\sigma_i = 0$, haverá dois termos em que nos aparecem os factores $e^{j\omega_i t}$ e $e^{-j\omega_i t}$, que correspondem a um regime sinusoidal de frequência angular ω_i. O sistema não é estável mas, neste caso, diz-se, algumas vezes, que o sistema é *marginalmente estável.*

Se, além dos factores $e^{j\omega_i t}$ e $e^{-j\omega_i t}$ nos aparecesse um factor $e^{\sigma_i t}$ em que $\sigma_i > 0$ isso significaria que as oscilações tenderiam a aumentar de amplitude e o sistema seria instável; sendo $\sigma_i < 0$, as oscilações tenderiam a diminuir de amplitude e o sistema seria estável.

b) Por cada factor $(s - s_i)^r$ no denominador de (7), isto é, por cada *polo* de ordem r da função K (s) haverá os seguintes r teremos em k (t)

$$e^{s_i t} \sum_{l=1}^{r} \frac{\phi_i^{(r-l)}(s_i)}{(r-L)!} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \qquad (14)$$

em que

$$\phi_i(s) = K(s).\ (s - s_i)^r \qquad (15)$$

Daqui se conclui que o factor $e^{s_i t}$ torna genérica a regra de *a função K (s) só dever ter polos, quer simples, quer múltiplos, na metade da esquerda do plano da variável complexa s, para que o sistema seja estável.*

A conclusão referida é válida quer os polos s_i correspondam a números reais, quer a números complexos.

APÊNDICE VIII

CONTORNO FECHADO NO PLANO DE S, ENVOLVENDO z ZEROS E p POLOS DE F (s). CONTORNO CORRESPONDENTE NO PLANO DE F(s) ENVOLVENDO (z — p) VEZES A ORIGEM DOS EIXOS

Consideremos o seguinte teorema clássico:

Seja F(s) uma função analítica e uniforme num domínio R; seja C uma curva fechada simples, em R, tal que F(s) não é igual a zero em qualquer ponto sobre o contorno C e o interior de C contém, um número finito de singularidades de F(s), todas elas polos. Se o número de zeros no interior de C (contando um zero de multiplicidade m, m vezes) é z, e se o número de polos de F(s) no interior de C (contando um polo de ordem n, n vezes) é p, então

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = z - p \qquad (1)$$

Se reparamos que

$$\frac{d \log F(s)}{ds} = \frac{F'(s)}{F(s)} \qquad (2)$$

e se escrevermos F(s) sob a forma

$$F(s) = |F(s)|\, e^{j \arg F(s)} \qquad (3)$$

será

$$\log F(s) = \log |F(s)| + j \arg F(s) \qquad (4)$$

Podemos assim escrever que, de acordo com o teorema referido, será

$$z - p = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_C d[\log F(s)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\left[\log F(s)\right]\Big|_C =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\left[\log |F(s)| + j \arg F(s)\right]\Big|_C =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\left[\log |F(s)|\right]\Big|_C +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j}\left[j \arg F(s)\right]\Big|_C \qquad (5)$$

A primeira destas duas parcelas é nula porque log | F(s) | volta ao seu valor original quando circulamos uma vez ao longo do contorno fechado C.

Será pois

$$z - p = \frac{1}{2\pi}\left[\arg F(s)\right]\Big|_C \qquad (6)$$

Como já vimos, ao contorno fechado C, no plano de s, corresponderá um contorno também fechado, relativo a F(s) no plano de $F(s) = u + jv$, de tal modo que a variação no ângulo do arg F(s) é (z — p) vezes 2π, isto é, tantas vezes 2π quanto é o valor $n = z - p$. Isto quer dizer que o contorno no plano de F(s) envolverá a origem dos eixos uma vez se for $n = 1$ e n vezes se for $n = n$. Se o contorno de F(s) não envolver a origem, será $n = 0$. Em resumo, o contorno de F(s) rodeia a origem dos eixos $n = (z - p)$ vezes, como queríamos provar.

APÊNDICE IX

CAMINHO FECHADO DE NYQUIST (NO PLANO DE s) DIAGRAMA DE NYQUIST (NO PLANO DE F (s))

O caminho fechado de NYQUIST é um contorno fechado, no plano da variável complexa $s = \sigma + j\omega$, que abrange completamente a metade da direita do plano de s. É formado, da maneira que se ilustra na fig. IX.1, em que o raio R do semicírculo da direita tende para infinito e o raio ρ dos pequenos semicírculos, à volta dos polos de F (s), situados sobre o eixo dos $\omega\omega$, tende para zero. Esses semicírculos são utilizados para evitar que o contorno fechado contenha singularidades da função F (s). Este caminho fechado abrangerá assim todos os *polos* (em número p) e todos os

zeros (em número z) da função, situados na metade da direita do plano da variável s.

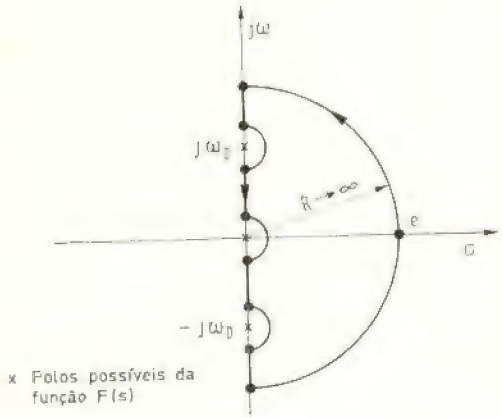


Fig. IX.1

Para obtermos o contorno correspondente ao caminho fechado de NYQUIST, no plano de $F(s) = u + j\,v$ precisamos considerar três tipos de troços no caminho fechado de NYQUIST: a) as semicircunferências de raio infinitesimal à volta de polos situados no eixo dos $\omega\omega$; b) a semicircunferência infinita; c) os troços situados no eixo dos $\omega\omega$.

Consideremos em primeiro lugar que existe um polo na origem dos eixos no plano de s, isto é, para $s = 0$ como se ilustra na fig. IX.2. Os pontos situados sobre essa circunferência podem ser expressos por

$$s_o = d\,r\,e^{j\alpha} \tag{1}$$

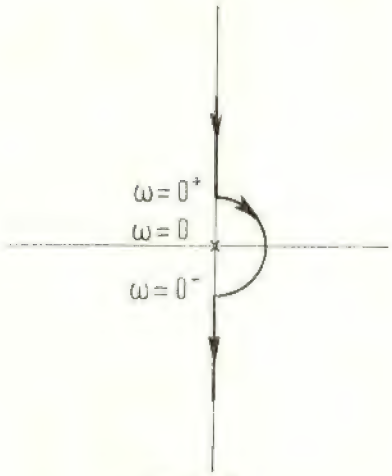


Fig. IX.2

Na vizinhança de um *polo* s_1, o valor de F (s) é determinado, essencialmente, pelo valor do polo e para um polo múltiplo de grau N, a função F (s) na sua vizinhança pode escrever-se dentro de certa aproximação

$$F(s) \simeq \frac{l}{(s - s_1)^N} \tag{2}$$

em que l é constante.

Se o polo estiver no eixo dos $\omega\omega$ será $s_1 = j\,\omega_1$, e poderá escrever-se

$$F(s) \simeq \frac{l}{(s - j\,\omega_1)^N} \tag{3}$$

Se o polo estiver na origem dos eixos será $\omega_1 = 0$ e os valores de F (s) correspondentes à semicircunferência de raio infinitesimal serão

$$F(s) \simeq l\,d\,r^{-N}\,e^{jN\alpha} \tag{4}$$

em que α varia de $+\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$. O respectivo lugar geométrico será um contorno circular de raio infinito correspondente a um ângulo igual a $N\pi$ quando ω varia desde um valor positivo muito pequeno $\omega = 0^+$ até um valor negativo muito pequeno $\omega = 0^-$.

Consideremos o caso de dois polos simples $s_1 = j\,\omega_1$ e $s_2 = -j\,\omega_1$ a que corresponderia, no denominador de F (s) o factor $(s^2 + \omega_1^2)$.

Suponhamos, para maior simplificação, que

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{(s + j\,\omega_1)\,(s - j\,\omega_1)} \tag{5}$$

O lugar geométrico dos pontos relativos a F (s) no plano de $F(s) = u + j\,v$ correspondente ao caminho fechado na fig. IX.3 é representado na fig. IX.4, em que os troços correspondentes às semicircunferências à volta de ω_1 (desde ω_1^+ a ω_1^- e desde $-\omega_1^+$ a $-\omega_1^-$ corrrespondem a semicircunfe-

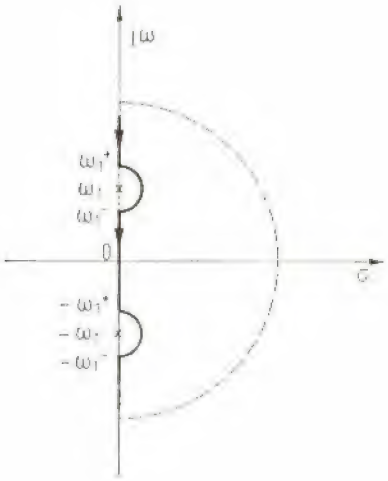


Fig. IX.3

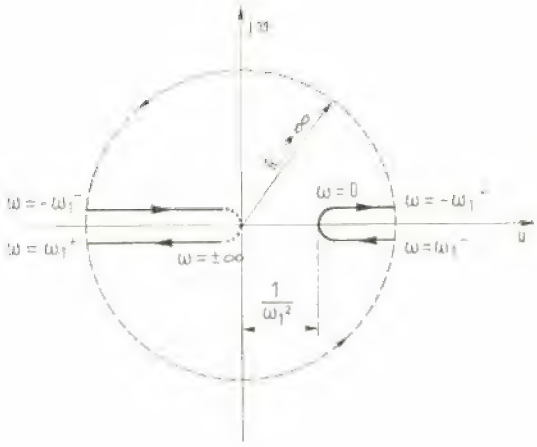


Fig. IX.4

rências de raio ∞. Pode pois concluir-se que as semicircunferências de raio infinitesimal, que semi-rodeiam os polos no eixo dos $\omega\omega$ (no plano de s), dão origem, no plano de F (s) a percursos circulares de raio infinito.

Consideremos agora a semicircunferência de raio infinito que faz parte do caminho fechado de NYQUIST. Para valores de s sobre essa circunferência, os valores de F (s) poderão ser expressos, dentro de certa aproximação por

$$F(s) \simeq 1 \cdot \frac{s^z}{s^p} = 1 \cdot s^{z-p} \qquad (6)$$

em que z é o número de zeros da função F (s) e p é o número de polos.

Nos sistemas físicos correntes, p excede z. Sobre a semicircunferência referida será

$$s = R \cdot e^{j\theta} \qquad (7)$$

em que $R \to \infty$ e θ varia de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

O lugar geométrico de (8)

$$F(s) = 1 \cdot R^{z-p} \; e^{j(z-p)\theta} \qquad (8)$$

que lhe corresponde, no plano de F (s) será de forma circular e raio infinitesimal, a que corresponderá, no limite, um ponto que será a origem dos eixos.

Vemos, portanto, que no caminho de NYQUIST, as semicircunferências de raio infinitesimal dão origem, no contorno correspondente de F (s), a percursos circulares de raio infinito; e que a semicircunferência de raio infinito dá lugar a um ponto que está na origem dos eixos.

O lugar geométrico dos pontos de F (s) correspondentes aos pontos no eixo dos $\omega\omega$, no plano de s, isto é, para

$$s = j\omega \qquad -\infty < \omega < \infty \qquad (9)$$

será o chamado diagrama polar de $F(j\omega)$. Este diagrama polar apresenta simetria conjugada, o que quer dizer que o gráfico relativo a $-\infty < \omega < 0$ é a imagem de espelho, em relação ao eixo horizontal, do gráfico relativo a $0 < \omega < \infty$. Trata-se de um contorno fechado e é a este lugar geométrico que se dá a designação de *Diagrama de Nyquist*.

APÊNDICE X (*)

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE NYQUIST

Como exemplo de aplicação do critério de Nyquist vamos estudar o caso simples do multivibrador astável, empregando válvulas electrónicas (**).

O multivibrador astável pode ser considerado como um amplificador de dois andares de acoplamento RC em que a saída se encontra directamente ligada à entrada, proporcionando assim uma realimentação positiva de 100%. Um esquema prático de multivibrador encontra-se representado na fig. X.1. Para maior simplicidade, supõe-se em relação a este esquema que os dois andares associados em cadeia são idênticos.

Para avaliar a estabilidade deste sistema recorrendo ao critério de Nyquist, bastará de acordo com o enunciado dado em (5.4) verificar se o lugar geométrico da função $A(j\omega)$. $\beta(j\omega)$ engloba o ponto de coordenadas (1,0) no plano $u + jv$ quando ω for tomada sobre todos os valores positivos e negativos.

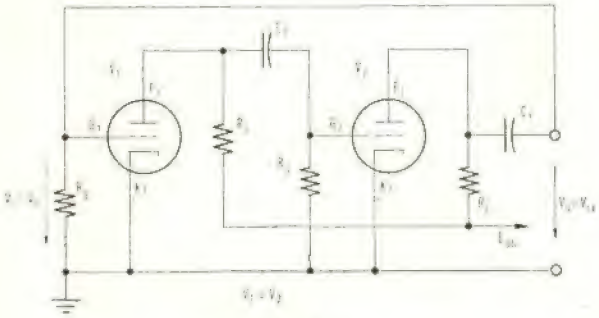


Fig. X.1

Da fig. X.1 podemos concluir que $\beta = \dfrac{V_{ra}}{V_o}$ é, neste caso, independente da frequência e igual a $+1$. Não teremos então mais do que traçar o diagrama polar de $A(j\omega)$ no plano $(u + jv)$.

Como os dois andares são idênticos,

$$A(j\omega) = A_1 \cdot A_2 = (A_1)^2 \qquad (1)$$

(*) Este Apêndice foi preparado pelo Assistente Eng.º Pedro Luís Borges Teixeira.

(**) Este circuito encontra-se estudado respectivamente para o caso de válvulas e transistores nos § 10.16 do Cap. X e 17.8.7 do Cap. XVII do CURSO DE ELECTRÓNICA APLICADA, do Autor (Ed. AEIST, 1967).

Para a determinação aproximada da variação do ganho de tensão com a frequência em relação a um dos dois andares, consideremos o esquema equivalente da fig. X.2

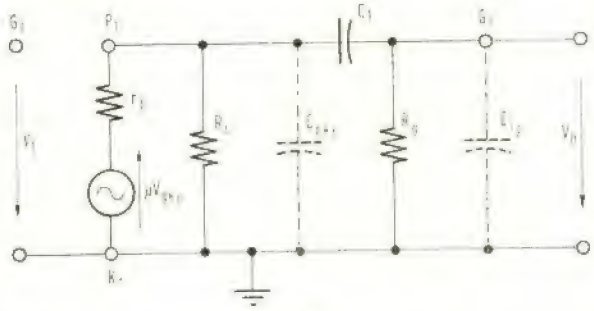


Fig. X.2

Em relação a este esquema, podemos, de acordo com a equação (13) do Apêndice II, escrever para expressão do ganho de tensão A_o na faixa central das frequências

$$A_o = \frac{V_o}{V_i} = -\,gm\,R_{eq} \qquad (2)$$

$$R_{eq} = r_p \,//\, R_g \,//\, R_L \qquad (3)$$

Na zona inferior da faixa, não poderemos desprezar a reactância do condensador de acoplamento C_1, e anàlogamente à equação (15) do Apêndice II podemos escrever:

$$A_1 = A_o \frac{1}{1 - j\,\dfrac{\omega_1}{\omega}} \qquad (4)$$

com

$$\omega_1 = \frac{1}{R\,C_1} \qquad (5)$$

e

$$R = R_g + \frac{r_p\,R_L}{r_p + R_L} \qquad (6)$$

Para a zona superior da faixa de frequências podemos desprezar a reactância de C_1, mas não poderemos deixar de considerar o efeito das capacidades interelectródicas da válvula do andar 1, assim como o da capacidade de entrada do andar 2. À semelhança da equação (23) do Apêndice II, teremos para expressão do ganho:

$$A_2 = A_o \frac{1}{1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_2}} \qquad (7)$$

com

$$\omega_2 = \frac{1}{C_T\, R_{eq}} \qquad (8)$$

$$C_T = (C_{pk})_1 + C_{i_2} \qquad (9)$$

Sendo Req dada pela expressão (3).

A amplificação de tensão global para as frequências inferiores da faixa será por conseguinte dada de (4), (2) e (1).

$$(A)_I = \left[\frac{-g_m\, R_{eq}}{1 - j\,\frac{\omega_1}{\omega}}\right]^2 = \left[\frac{g_m^2\, R_{eq}^2}{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}\right] e^{j2\varphi} \qquad (10)$$

E para as frequências superiores:

$$(A)_S = \left[\frac{-g_m\, R_{eq}}{1 + j\,\frac{\omega}{\omega_2}}\right] = \left[\frac{g_m^2\, R_{eq}^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\right] e^{-j2\varphi'} \qquad (11)$$

com $$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega} \qquad (12)$$

e $$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_2} \qquad (13)$$

A partir das equações (10), (11), (12) e (13) podemos traçar, a partir do quadro X.3 a variação aproximada de A (e por conseguinte de Aβ) com a frequência.

	ω			
	0	ω_1	ω_2	∞
2φ	π	$\frac{\pi}{2}$	—	—
$2\varphi'$	—	—	$-\frac{\pi}{2}$	π
$\lvert (A)_I \rvert$	0	$\frac{g_m^2\, R_{eq}^2}{2}$	—	—
$\lvert (A)_S \rvert$	—	—	$\frac{g_m^2\, R_{eq}^2}{2}$	0

Quadro X.3

A fig. X.4 apresenta, de acordo com o quadro X.3 o diagrama polar de Aβ no plano u + j v. Para a faixa de frequências (— ∞ ,0), o diagrama é, por razões de simetria, percorrido outra vez no mesmo sentido. De acordo com a figura, o ponto (1,0) é sempre englobado pelo diagrama polar representado. A instabilidade desta montagem, o que constitui um facto conhecido, encon-

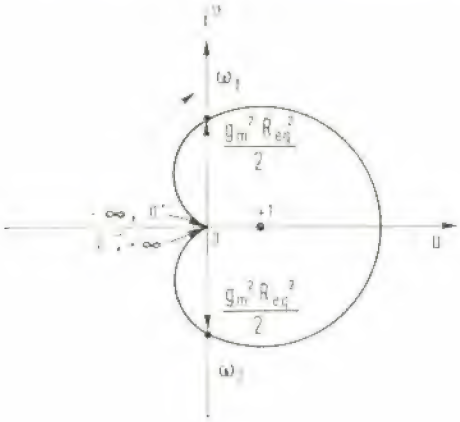


Fig. X.4

tra-se assim confirmada através da aplicação do critério de Nyquist.

BIBLIOGRAFIA

Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, Princeton, 1945

Churchill, R. V., *Modern Operational Mathematics in Engineering*, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1944

Cote, A.J. and Oakes, J.B., *Linear Vacuum-Tube and Transistor Circuits*, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1961

Di Stefano III, Stubberud, Williams, *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, Schaum Publishing Co., 1967

Fernandes A.A. de C., *Lições de Electrónica Aplicada*, Livros III e X, A.E. I.S.T., 1966 e 1967

Hammond, P.H., *Feedback Theory and ist Applications*, The English Universities Press. Ltd., 1958

Holbrook, J.C., *Laplace Transforms for Electronic Engineers*, Pergamon Press, 1966

ITT, *Reference Data for Radio Engineers*, 5th edition, 1968

Takahashi, T., *Mathematics of Automatic Control*, Holt Rinehart and Winston, 1966

Thornton, R.D. et al, *Multistage Transistor Circuits*, S.E.E.C., Volume 5, John Wiley and Sons, Inc. 1965

Toralballa, L.V., *Theory of Functions*, Charles E. Merri, Books, Inc., 1963

A Mobil mostra-lhe inúmeras maneiras de gastar menos óleo.

Reduzir os orçamentos de lubrificação é apenas uma parte do Programa Mobil para Redução de Custos. As economias totais que se estendem a outros campos podem exprimir-se por muitos algarismos.

Qualquer pessoa pode vender óleos. Mas a habilidade está em vender **menos** óleo - e nós fizemos disso um sistema: o PROGRAMA MOBIL PARA REDUÇÃO DE CUSTOS.

Isto significa serviço: serviço técnico, serviço laboratorial, serviço de treino, serviço de informação administrativa... e podíamos citar ainda mais vantagens.

Num cliente importante da indústria portuguesa conseguimos evitar num só ano o consumo de cerca de 200.000$00 de óleo através de recomendações especiais relativas à utilização mais racional dos lubrificantes.

Mas poupar óleo foi só o princípio. A lubrificação apropriada evitou perdas de tempo no uso dos equipamentos e este trabalho, mais eficiente, também reduziu despesas.

Na realidade, o que se poupa pode exceder em muito o custo dos lubrificantes. O que explica a razão porque vendemos mais vendendo menos.

Mobil

vendemos mais vendendo menos

C. D. U. 691.327 : 539.412 : 627.82
691.327 : 620.18 : 627.82

CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS E MINEROPETROGRÁFICAS DE TAROLOS DE BETÃO EXTRAÍDOS DA BARRAGEM DE MIRANDA*

ESTUDO DO APARECIMENTO E DA COLMATAGEM DUMA FENDA HORIZONTAL

por F. PERES RODRIGUES
Eng.º Civil, Especialista do LNEC
M. G. BARROSO
Eng.ª de Minas, Est. p.ª Especialista do LNEC
L. AIRES-BARROS
Professor do IST, Consultor-investigador do LNEC

RESUMO

Apresentam-se as tensões de rotura à tracção de 205 provetes e a caracterização mineropetrográfica de 50 lâminas delgadas de tarolos de betão extraídos de três furos de sondagem efectuados no corpo da barragem e atravessando uma fenda horizontal e diversas juntas de betonagem.

Tentam-se algumas correlações entre as características obtidas.

Conclui-se que a fraca resistência de algumas juntas de betonagem foi uma das causas do aparecimento da fenda e que a sua colmatagem posterior foi devida à natureza incrustante da água da albufeira, comprovada por análise química e pelo estudo das lâminas delgadas.

SYNOPSIS

The Authors present the ultimate tensile strength of 205 samples and the mineralogic-petrographic characterization of 50 thin sections from concrete cores obtained in three boreholes in the body of the dam through a horizontal crack and some construction joints; try some correlations between the characteristics obtained; and conclude that poor strength at some construction joints was one of the causes of the crack, which was subsequently filled up due to the hardness of the reservoir water, confirmed by the chemical analysis of the water and the observation of the thin sections.

1 — INTRODUÇÃO

O aparecimento duma fenda horizontal, com passagem de água, no contraforte 3E da Barragem de Miranda, da Hidro-Eléctrica do Douro (HIDOURO), levou esta empresa a solicitar ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) a averiguação das causas determinantes da abertura da referida fenda.

A HIDOURO procedeu, entretanto, à abertura de três furos de sondagem, à cota 510, com vista a eliminar possíveis subpressões (fig. 1) e a possibilitar a obtenção de tarolos de betão destinados a ensaios ulteriores.

As duas entidades acordaram na realização do seguinte programa de trabalhos:

a) Ensaios de tracção simples de cerca de 200 tarolos correspondentes a juntas de betonagem e a betão;

b) Análise mineropetrográfica de 50 lâminas delgadas correspondentes a secções de juntas de betonagem e de betão;

c) Análise química da água da albufeira tendente a determinar a sua agressividade.

No que se segue, descrevem-se as análises e os ensaios realizados e os resultados obtidos. Com base nos mesmos tentaram-se algumas correlações ligando características que pareceram mais directamente dependentes e, por fim, formularam-se, como síntese, algumas conclusões.

---

* Trabalho apresentado em inglês no Simpósio International de Mecânica das Rochas, Madrid, Outubro de 1968, e em português nas 2.ª Jornadas de Engenharia e Arquitectura do Ultramar, Luanda, Junho de 1969.

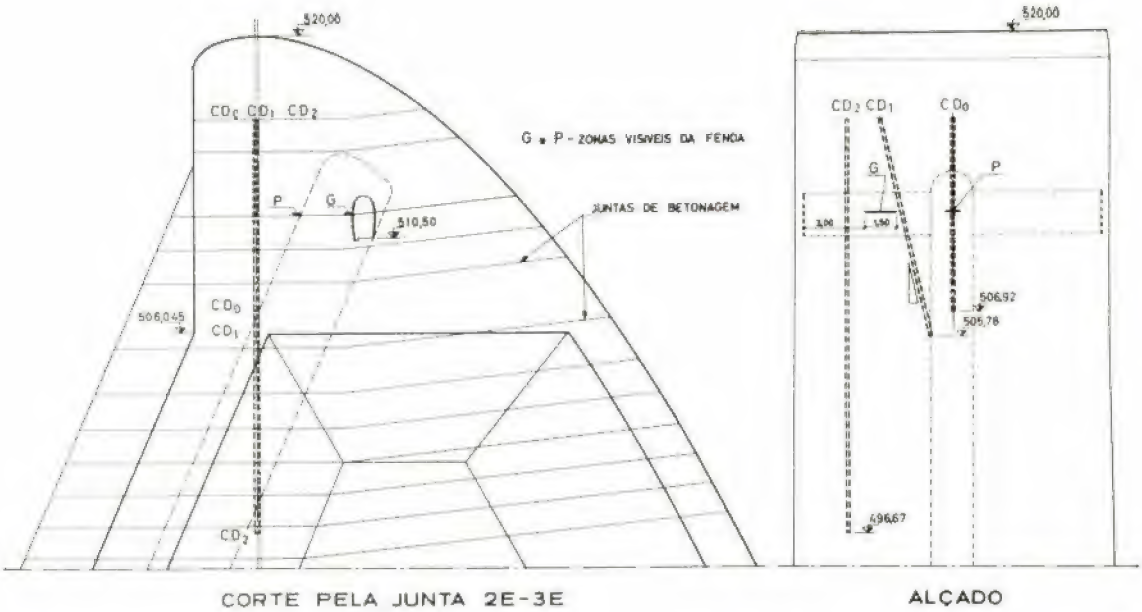


Fig. 1

2 — CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO BETÃO

Para se caracterizar mecânicamente o betão e, ao mesmo tempo, possibilitar a formulação de correlações com os dados obtidos por observação microscópica, foram ensaiados, à rotura por tracção simples, 205 provetes de modo a obter-se uma amostragem tanto quanto possível completa ao longo das três sondagens abertas. Atendendo a que, para serem comparativos, os valores da resistência à tracção se devem referir a provetes de comprimentos iguais e as amostras disponíveis apresentarem comprimentos variáveis, classificaram-se e cortaram-se os tarolos de sondagem de modo a serem definidas as três classes de 9 cm, 6 cm e 3,5 cm.

Nos topos de cada um dos provetes foram coladas peças metálicas apropriadas que ligavam *cardans* especiais (fig. 2). Os provetes, assim preparados, foram ensaiados numa máquina universal de 6 toneladas (fig. 3).

Os valores das tensões de rotura obtidos, relativos a cada sondagem, constam do Quadro I. Neste mesmo quadro estão inscritos também os valores das tensões de rotura depois de corrigidos, calculados a partir da redução dos valores médios das três classes de provetes à classe de valores mais baixos que, como seria de esperar, é a de 9 cm.

Com o fim de se poderem comparar os valores das tensões de rotura obtidos nos ensaios com os mesmos valores depois de corrigidos, representaram-se na fig. 4 os respectivos histogramas.

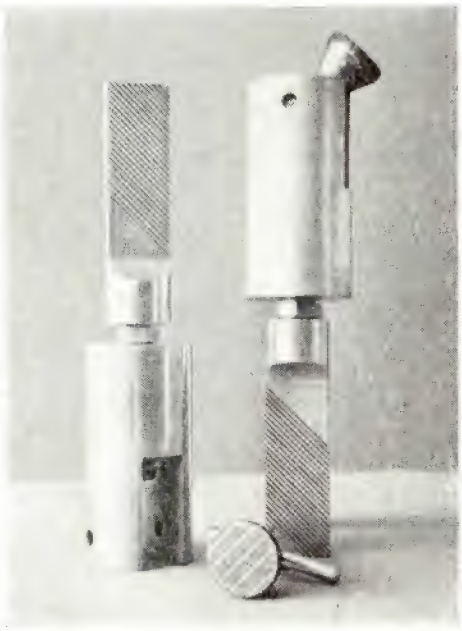


Fig. 2

Como no caso presente interessava pôr em destaque os valores correspondentes a juntas de betonagem, que constituem sempre zonas de

QUADRO I

COMPRIM. DO PROVETE	PROFUNDIDADE (m)	PROVETE Nº	TENSÕES DE ROTURA kgf/cm²	TENSÕES DE ROTURA CORRIGIDAS kgf/cm²
SONDAGEM C. D. 0				
9,0 cm	0,10	133	9,4	—
	0,80	134	13,1	—
	1,05	135	22,8	—
	1,80	136	17,6	—
	2,15	43	10,2	—
	2,40	137	17,4	—
	2,80	139	18,2	—
	2,90	140	6,2	—
	3,10	44	8,4	—
	3,45	144	14,1	—
	3,80	45	7,0	—
	3,80	45-A	9,5	—
	3,80	45-B	8,9	—
	3,90	145	8,8	—
	4,05	146	5,2	—
	4,30	148	8,9	—
	4,70	151	6,6	—
	4,85	153	7,7	—
	5,20	154	11,8	—
	5,95	156	7,7	—
	6,60	47	19,4	—
	6,60	47-A	13,5	—
	6,80	159	15,9	—
	7,00	160	0	—
	7,55	164	8,0	—
	7,75	165	4,6	—
	7,90	166	10,1	—
	8,55	169	16,2	—
	8,80	171	7,8	—
	9,30	48	18,3	—
	9,90	174	11,2	—
6,0 cm	1,40	42	11,3	8,2
	2,60	138	37,3	34,2
	3,10	44-A	7,5	4,4
	3,15	141	12,5	9,4
	3,25	142	5,3	2,2
	4,20	147	11,7	8,6
	4,40	149	3,4	0,3
	4,75	152	20,1	17,0
	5,30	155	12,6	9,5
	5,40	46-A	17,2	14,1
	6,40	158	15,3	12,2
	7,15	161	17,8	14,7
	7,40	163	20,9	17,8
	8,20	167	18,8	15,7
	8,45	168	11,0	7,9
	9,30	48-A	21,1	18,0
	9,60	173	17,2	14,1
3,5 cm	3,35	143	15,9	10,5
	4,50	150	18,1	12,7
	5,40	46	25,1	19,7
	6,10	157	9,3	3,9
	7,30	162	18,4	13,0
	8,70	170	14,6	9,2
	9,10	172	21,8	16,4
SONDAGEM C. D. 1				
9,0 cm	0,52	1	9,6	—
	0,95	52	9,3	—
	1,05	53	25,0	—
	1,45		18,2	—
	2,05	57	3,7	—
	2,40	2	18,5	—
	2,55	3	13,5	—
	2,95	59	14,1	—
	3,05	60	8,1	—
	3,20	61	6,3	—
	3,50	4-A	13,6	—
	3,58	4	15,8	—
	3,58	4-B	19,3	—
SONDAGEM C. D. 1				
9,0 cm	4,65	64	4,7	—
	4,80	65	2,3	—
	5,00	66	7,9	—
	5,25	6	13,1	—
	5,25	6-A	14,6	—
	5,35	68	7,7	—
	5,80	7	8,5	—
	5,95	69	12,9	—
	6,05	70	6,3	—
	7,35	9	18,1	—
	8,00	10	11,9	—
	8,00	10-A	11,3	—
	8,35	75	6,3	—
	8,60	76	12,5	—
	8,80	11	5,6	—
	10,05	79	14,7	—
	10,55	49	11,8	—
	11,50	50	15,6	—
6,0 cm	0,52	1-A	7,7	4,6
	1,30	54	9,7	6,6
	1,55	55	17,4	14,3
	1,75	56	15,4	12,3
	3,85	62	7,3	4,2
	4,28	5	3,7	0,6
	4,28	5-A	12,6	9,5
	4,30	63	11,2	8,1
	5,50	67	6,9	3,8
	6,00	175	13,2	10,1
	6,40	71	11,0	7,9
	6,60	8	5,7	2,6
	6,85	72	13,8	10,7
	7,00	73	12,1	9,0
	7,65	74	21,2	18,1
	9,15	77	26,3	23,2
	9,45	78	14,3	11,2
	9,60	12	16,1	13,0
3,5 cm	0,10	51	25,8	20,4
	2,70	58	16,4	11,0
	9,85	13	19,7	14,3
	10,25	81	20,0	14,6
	10,85	80	20,2	14,8
SONDAGEM C. D. 2				
9,0 cm	0,50	82	15,0	—
	0,95	15	3,0	—
	1,25	83	19,7	—
	1,40	84	6,6	—
	1,70	86	9,9	—
	2,05	87	13,2	—
	2,35	89	9,3	—
	2,60	17-A	13,8	—
	3,00	91	11,0	—
	3,60	92	13,4	—
	4,00	19	13,6	—
	5,00	96	15,2	—
	5,50	97	13,7	—
	5,75	98	10,8	—
	5,85	22	13,8	—
	5,85	22-A	17,5	—
	6,60	23	7,7	—
	7,10	102	12,1	—
	7,40	24-A	16,1	—
	7,80	104	8,4	—
	8,20	106	26,1	—
	10,15	107	24,9	—
	10,75	108	4,3	—
	11,15	110	15,7	—
	11,30	111	23,0	—
	11,60	112	5,2	—
	12,80	113	10,4	—
SONDAGEM C. D. 2				
9,0 cm	13,90	116	3,5	—
	14,10	33	6,4	—
	14,10	33-A	4,8	—
	14,35	117	12,0	—
	14,70	34	20,1	—
	14,70	34-A	6,7	—
	15,20	35	16,1	—
	15,45	121	6,0	—
	16,20	36	7,2	—
	16,20	36-A	16,0	—
	17,10	37	12,5	—
	17,65	128	6,1	—
	17,70	38	8,6	—
	18,50	39-A	9,7	—
	18,85	130	10,8	—
	19,35	132	16,1	—
6,0 cm	0,95	15-A	12,6	9,5
	1,60	85	11,9	8,8
	1,90	16	8,0	4,9
	1,90	16-A	36,5	33,4
	2,15	88	20,4	17,3
	2,60	17	17,2	14,1
	2,70	90	10,3	7,2
	3,30	18	12,6	9,5
	3,90	93	20,8	17,7
	4,00	19-A	18,6	15,5
	4,25	94	15,1	12,0
	4,40	95	19,0	15,9
	4,60	20	21,5	18,4
	6,15	99	15,5	12,4
	6,45	100	15,3	12,2
	6,60	23-A	24,8	21,7
	6,95	101	14,6	11,5
	7,40	24	2,1	0
	7,95	105	20,4	17,3
	8,40	25	15,8	12,7
	8,95	26	13,6	10,5
	8,95	26-A	9,6	6,5
	9,60	27	6,6	3,5
	9,60	27-A	37,3	34,2
	10,40	28	9,3	6,2
	10,90	109	7,2	4,1
	11,45	29	10,8	7,7
	12,40	30	21,7	18,6
	13,00	31	29,7	26,6
	13,00	31-A	2,7	0
	13,77	32	7,2	4,1
	14,50	118	12,5	9,4
	15,60	123	17,9	14,8
	16,00	125	11,3	8,2
	16,70	126	23,1	20,0
	17,35	127	18,6	15,5
	17,70	38-A	13,5	10,4
	18,20	129	12,1	9,0
	18,50	39	16,3	13,1
	19,20	40-A	8,3	5,2
3,5 cm	0,30	14	12,3	6,9
	5,15	21	11,9	6,5
	10,40	29-A	18,1	12,7
	13,30	114	21,1	15,7
	13,55	115	15,2	9,8
	13,77	32-A	8,6	3,2
	14,90	119	12,7	7,3
	15,10	120	19,0	13,6
	15,50	122	23,7	18,3
	15,75	124	8,3	2,9
	17,10	37-A	20,5	15,1
	19,05	131	17,0	11,6
	19,20	40	12,5	7,1

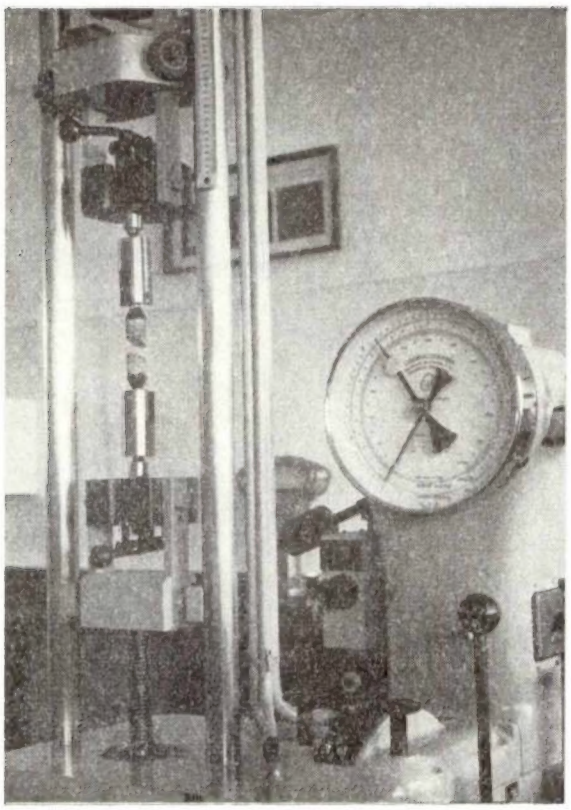


Fig. 3

menor resistência, seleccionaram-se os valores mais baixos obtidos nos provetes correspondentes a bandas de 0,5 m, centradas nas juntas de

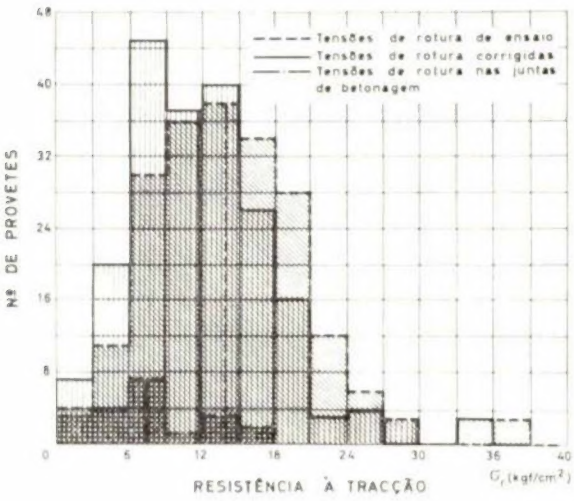


Fig. 4

betonagem, e traçou-se também na fig. 4 o respectivo histograma para efeitos de comparação.

3 — CARACTERIZAÇÃO MINEROPETROGRÁFICA DO BETÃO

Foram escolhidos, por exame microscópico, os tarolos mais representativos das juntas de betonagem, a partir das quais se elaboraram 50 lâminas delgadas que foram estudadas ao microscópio polarizante.

Com este estudo pretendeu-se não só caracterizar qualitativamente os diferentes troços das sondagens referidas, como ter conhecimento das quantidades dos diversos tipos de inerte e argamassa (e singularidades) presentes.

Para a análise qualitativa das lâminas delgadas, usou-se a técnica de identificação habitual nos estudos de micropetrografia. Efectivamente o inerte, no tipo de betão analisado, é fundamentalmente constituído por minerais de rochas granitóides. Quanto à argamassa, houve que proceder a determinações de índole mineralógica para a caracterizar cabalmente.

Prestou-se, ainda, especial atenção à presença de singularidades relevantes como seja a existência de calcite, de microfissuras, de vazios, etc.

Na análise quantitativa foram seguidos os princípios da análise modal tão usada em petrografia.

Para se obter o *modo*, composição real da rocha, no caso vertente a composição real do betão, usou-se uma platina integradora. Tenha-se em atenção que em petrografia ao conceito de *modo* contrapõe-se o de *norma*, que se refere à composição virtual da rocha. Esta composição virtual é a que se obtém a partir da análise química da rocha, após cálculo petroquímico, mediante o qual se determinam os *minerais virtuais* representativos da análise química de que se partiu. Estes *minerais virtuais* podem corresponder a *minerais reais* que existem efectivamente na rocha (e contados no *modo*) ou não existir na rocha, mas representar minerais aí presentes.

Para o cálculo da composição modal do betão usou-se uma platina integradora, por meio da qual se realizaram séries de trajectos paralelos e equidistantes sobre as lâminas delgadas em estudo.

A relação de Delesse, ou de «área-volume» em petrogafia estabelece que a razão entre a área ocupada por um mineral e a área total da amostra é uma estimativa consistente da percentagem em volume do mineral na rocha.

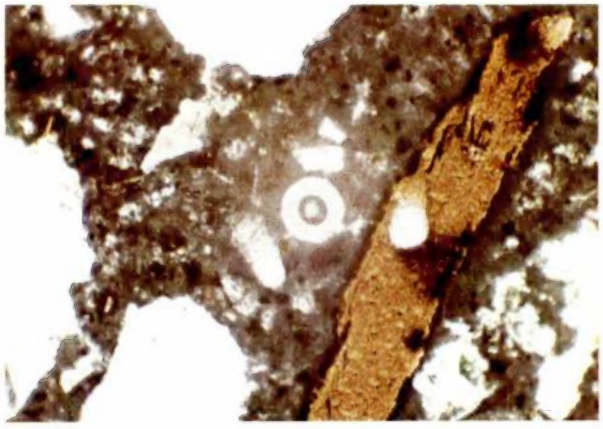


Fig. 5 N//: x 90

Aspecto geral do betão da sondagem C. D. 1 aos 0,52 m. A branco clastos de quartzo, a cinzento escuro e de forma alongada, palheta de biotite (inerte). A argamassa isotrópica (pobre ou desprovida de portlandite). No centro da fotografia, uma cavidade circular preenchida por calcite fibrorradiada, forrando interiormente as suas paredes.

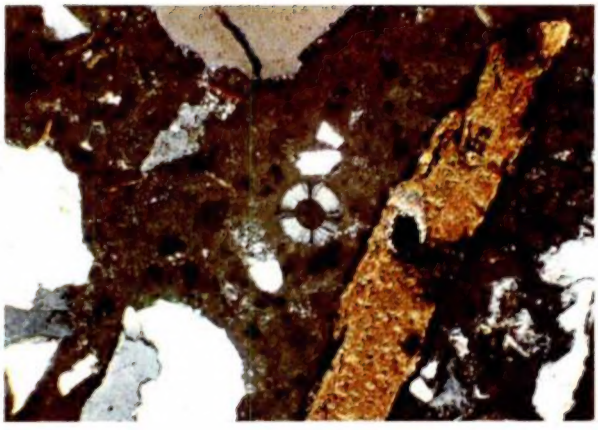


Fig. 6 N+: x 90

Mesmo aspecto da fotografia anterior, mas com os nícois cruzados.

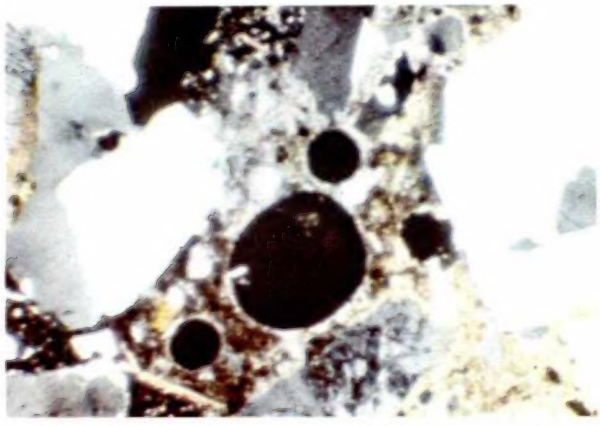


Fig. 7 N+: x 90

Aspecto particular do betão da sondagem C. D. 1, aos 7,35 m. A branco, clastos de quartzo, a cinzento, clastos de quartzo e de feldspatos com geminação polissintética (canto superior esquerdo). A argamassa é rica de portlandite. Os vacúolos circulares (a negro) estão vazios e são forrados por portlandite.

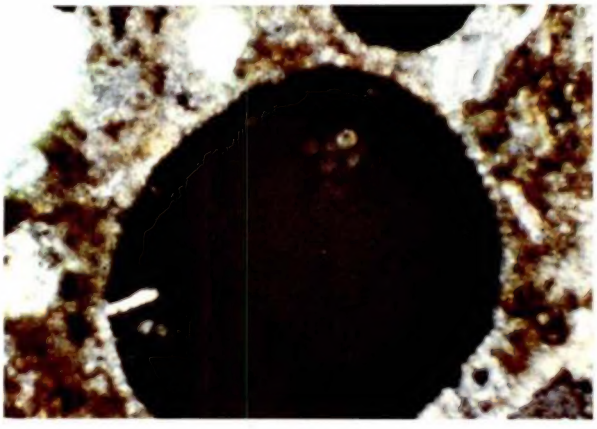


Fig. 8 N+: x 90

Pormenor da fotografia anterior mostrando a matriz rica de portlandite (anisotróqica) e os vacúolos com fina película interna de $(OH)^2$ Ca.

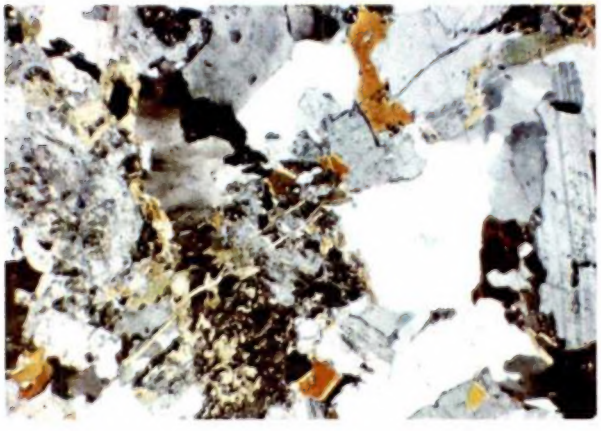


Fig. 9 N+: x 32

Aspecto do betão da sondagem C. D. 2 aos 11,45 m. Na fotografia observam-se finas vénulas subparalelas, encaminhando-se do canto inferior esquerdo, para o canto superior direito. Tais vénulas são de calcite e preenchem fissuras que atravessam o inerte (quartzo e feldspatos).

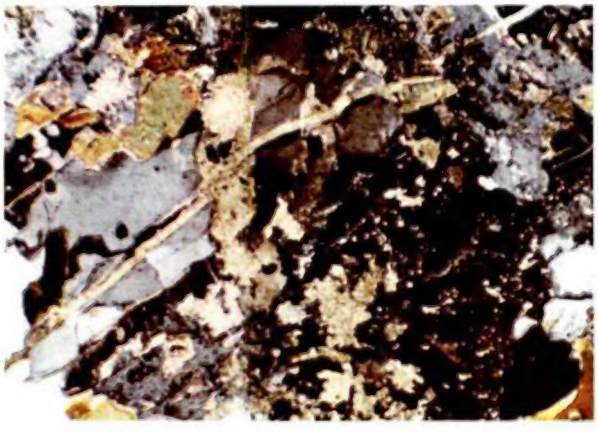


Fig. 10 N+: x 90

Pormenor da fotografia anterior. Além das finas e longas vénulas de calcite há plagas de calcite de contornos irregulares.